



Modélisation de la propagation et de l'interaction d'une onde acoustique pour la télémétrie de structures complexes

Bo Lü

► To cite this version:

Bo Lü. Modélisation de la propagation et de l'interaction d'une onde acoustique pour la télémétrie de structures complexes. Acoustique [physics.class-ph]. Commissariat à l'Energie Atomique; Direction des système d'information, 2011. Français. <NNT : ISSN 0429-3460>. <tel-01214241>

HAL Id: tel-01214241

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01214241>

Submitted on 11 Oct 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - ShareAlike 4.0 International License

Académie de Nantes

Université du Maine, Le Mans, France
École Doctorale Sciences Pour l'Ingénieur, Géosciences, Architecture
Thèse de Doctorat en Acoustique

Modélisation de la propagation et de l'interaction d'une onde acoustique pour la télémétrie de structures complexes

Bo LÜ

Soutenue le 07/11/2011 devant la commission d'examen

M. DESCHAMPS MARC	Directeur de recherches CNRS, LMP, Bordeaux	Rapporteur
M. BOUCHE DANIEL	Directeur de recherches CEA, CEA/DAM, Arpajon	Rapporteur
MME. POTEL CATHERINE	Professeur, Université du Maine, Le Mans	Directrice de thèse
M. DARMON MICHEL	Expert CEA, CEA, LIST, Gif-sur-Yvette	Encadrant CEA
MME. FRADKIN LARISSA	Professeur émérite, Sound Mathematics Ltd., UK	Examinatrice
M. CORNELOUP GILLES	Professeur, Université de la méditerranée, Aix en Provence	Examineur

À ma famille !

致我最亲爱的父亲，母亲和妻子！

Résumé

Cette étude s'inscrit dans le cadre du développement d'outils de simulation de la télémétrie qui est une technique possible pour la surveillance et le contrôle périodique des réacteurs nucléaires à neutrons rapides refroidis par du sodium liquide (RNR-Na).

De manière générale, la télémétrie consiste à positionner au sein du réacteur un transducteur qui génère un faisceau ultrasonore. Ce faisceau se propage à travers un milieu inhomogène et aléatoire car le sodium liquide est le siège de fluctuations de température qui impliquent une variation de la célérité des ondes ultrasonores, ce qui modifie la propagation du faisceau. Ce dernier interagit ensuite avec une structure immergée dans le réacteur. La mesure du temps de vol de l'écho reçu par le même transducteur permet de déterminer la position précise de la structure. La simulation complète de la télémétrie nécessite donc la modélisation à la fois de la propagation d'une onde acoustique en milieu inhomogène aléatoire et de l'interaction de cette onde avec des cibles de formes variées ; c'est l'objectif de ce travail.

Un modèle stochastique basé sur un algorithme de type Monte-Carlo est tout d'abord développé afin de simuler les perturbations aléatoires du champ de propagation. Le champ acoustique en milieu inhomogène est finalement modélisé à partir du champ calculé dans un milieu homogène moyen en modifiant les temps de parcours des rayons homogènes par incorporation d'une correction fournie par le modèle stochastique. Le modèle stochastique de propagation ainsi développé a été validé par comparaison avec un modèle déterministe et s'avère nettement plus simple à mettre en œuvre au sein de la plateforme logicielle de simulation en contrôle non destructif CIVA et moins coûteux en temps de calcul que le modèle déterministe.

En vue de modéliser l'interaction onde acoustique/cible, des modèles classiques de diffraction ont été évalués dans le cadre de structures rigides, parmi lesquels la théorie géométrique de la diffraction (GTD) et l'approximation de Kirchhoff (KA), ces deux approches apparaissant comme complémentaires. En les combinant de sorte à ne conserver que leurs avantages, nous avons développé un modèle hybride (KA raffiné) en utilisant une procédure similaire à la théorie physique de la diffraction (PTD). Le modèle KA raffiné fournit une amélioration de la prédiction en champ proche d'une cible rigide. Le modèle de diffraction KA initial (non raffiné) a été ensuite étendu pour traiter une cible réaliste d'impédance finie. Le modèle KA « général » ainsi obtenu se révèle être une solution satisfaisante pour l'application à la télémétrie. Finalement, le couplage du modèle stochastique de propagation et du modèle de diffraction KA général nous a permis de construire un outil de simulation complète de la télémétrie en milieu inhomogène.

Mots-clefs : sûreté nucléaire, RNR-Na, télémétrie, sodium, ultrasons, milieu aléatoire, diffraction.

Abstract

This study takes place in the framework of tools development for the telemetry simulation. Telemetry is a possible technology applied to monitoring the sodium-cooled fast reactors (SFR) and consists in positioning in the reactor core a transducer to generate an ultrasonic beam. This beam propagates through an inhomogeneous random medium since temperature fluctuations occur in the liquid sodium and consequently the sound velocity fluctuates as well, which modifies the beam propagation. Then the beam interacts with a reactor structure immersed in sodium. By measuring the time of flight of the backscattered echo received by the same transducer, one can determine the precise location of the structure. The telemetry simulation therefore requires modeling of both the acoustic wave propagation in an inhomogeneous random medium and the interaction of this wave with structures of various shapes; this is the objective of this work.

A stochastic model based on a Monte Carlo algorithm is developed in order to take into account the random fluctuations of the acoustic field. The acoustic field through an inhomogeneous random medium is finally modeled from the field calculated in a mean homogeneous medium by modifying the travel times of rays in the homogeneous medium, using a correction provided by the stochastic model. This stochastic propagation model has been validated by comparison with a deterministic model and is much simpler to integrate in the CIVA software platform for non destructive evaluation simulation and less time consuming than the deterministic model.

In order to model the interaction between the acoustic wave and the immersed structures, classical diffraction models have been evaluated for rigid structures, including the geometrical theory of diffraction (GTD) and the Kirchhoff approximation (KA). These two approaches appear to be complementary. Combining them so as to retain only their advantages, we have developed a hybrid model (the so-called refined KA) using a procedure similar to the physical theory of diffraction (PTD). The refined KA provides an improvement of the prediction in the near field of a rigid scatterer. The initial (non refined) KA model is then extended to deal with the scattering from a finite impedance target. The obtained model, the so-called “general” KA model, is a satisfactory solution for the application to telemetry. Finally, the coupling of the stochastic propagation model and the general KA diffraction model has allowed us to build a complete simulation tool for the telemetry in an inhomogeneous medium.

Keywords: nuclear safety, SFR, telemetry, sodium, ultrasounds, random medium, scattering.

REMERCIEMENTS

Cette thèse a été préparée au CEA, LIST au sein du Département Imagerie et Simulation pour le Contrôle (DISC) d'octobre 2008 à novembre 2011, dans le cadre d'une collaboration avec le Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM) et la société Sound Mathematics Ltd. basée à Cambridge. Cette page a été sans doute l'une des plus difficiles à écrire de ce manuscrit car elle a pour vocation de traduire en quelques lignes les efforts soutenus des personnes qui ont participé à ce travail et qui m'ont encouragé pendant ces trois années.

Je remercie M. Philippe Benoist et Mme. Clarisse Poidevin, successivement chef du département DISC, de m'avoir accueilli dans leur département et d'avoir cru en moi. Je tiens à remercier M. Pierre Calmon, responsable de la recherche de base au sein du DISC, de m'avoir proposé ce sujet de thèse aussi intéressant et de m'avoir suivi tout au long de cette thèse. J'adresse également mes remerciements à M. Steve Mahaut, chef du laboratoire de simulation et modélisation (LSM), pour m'avoir accordé sa confiance et pour ses remarques toujours très pertinentes et avisées.

J'adresse ensuite mes plus vifs remerciements à M. Michel Darmon, qui a encadré au quotidien mes travaux de recherche au CEA. Sa très grande disponibilité et ses qualités humaines ont rendu cette thèse particulièrement agréable. La rigueur et l'enthousiasme pour entreprendre des recherches originales font également partie de ce qu'il m'a transmis au cours de ces trois années. Etant un thésard étranger, j'ai, particulièrement apprécié son soutien personnel concernant les tâches administratives, la rédaction et la communication scientifique. Je lui témoigne pour tout cela toute ma gratitude, et plus encore.

Je remercie très sincèrement Mme Catherine Potel, Professeur à l'Université du Maine, qui fut une directrice de thèse très responsable ; ses conseils judicieux m'ont été particulièrement utiles.

Dans le cadre d'une collaboration avec la société Sound Mathematics Ltd., j'ai pu rencontrer M. Victor Zernov, chercheur russe très expérimenté en mathématique ainsi qu'en simulation numérique pour les modèles d'interaction des ondes de haute fréquence. Je le remercie grandement de m'avoir fait profiter de son savoir-faire dans ce domaine.

Cette étude s'intègre dans le projet TECNA dont le partenaire CEA/DEN/DTN du centre CEA de Cadarache a apporté un très grand soutien à ce travail. Je veux exprimer ma gratitude à M. François Baqué pour les informations qu'il nous a communiquées concernant les besoins industriels, et à M. Gilles Gobillot pour les essais expérimentaux qu'il a réalisés pour les validations expérimentales. Je tiens également à remercier M. Frédéric Reverdy, chef du projet TECNA au CEA, LIST ; ses capacités relationnelle et de gestionnaire ont assuré le bon déroulement du projet.

Je tiens à remercier à M. Marc Deschamps, Directeur de Recherche CNRS au Laboratoire de Mécanique Physique (LMP), et M. Daniel Bouche, Directeur de Recherche CEA, d'avoir accepté le rôle de rapporteurs de cette thèse. Je remercie également M. Gilles Corneloup, Professeur de l'Université de la Méditerranée, directeur du Laboratoire de Caractérisation Non Destructive (LCND), et Mme Larissa Fradkin, Professeur émérite de South Bank University de Londres et fondateur de la société Sound Mathematics Ltd., d'avoir accepté de

faire partie de mon jury de soutenance. Je les remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

J'exprime ma reconnaissance à M. Nicolas Leymarie pour l'aide qu'il m'a apportée à l'intégration logicielle du modèle de propagation développé dans CIVA. J'ai, au cours de nombreuses discussions scientifiques avec M. Alain Lhémy, particulièrement apprécié sa curiosité suscitée par ce vaste sujet et sa grande culture scientifique. J'adresse également mes remerciements à Sylvain Chatillon pour ses conseils judicieux sur de nombreuses présentations orales.

Je remercie chaleureusement les personnes du DISC, notamment Mme. Marie-Odile Bourdeau pour les tâches administratives, M. Hervé Schepens pour la logistique et M. Daniel Lobjois pour l'informatique.

J'adresse également mes sincères remerciements à Mlle. Laura Taupin et Mlle. Chiara Zorni pour les nombreux voyages ensemble agréables à Grenoble à l'occasion de la formation Techno-doc, et à tous les autres collègues thésards successifs du DISC, grâce à qui j'ai bénéficié d'une excellente ambiance de travail et de moments inoubliables, je pense à Benoît, Sophie, Alex, Amira, Tek, Roberto, Matthieu, Thomas, Antoine, Souad, Michaël, Warida, Damien, Steve, Clémence, Adrien, Blandine, François, Audrey G et Audrey V.

Pour conclure, je pense très affectueusement à mes parents, ShuHua et JiaQiang qui m'ont toujours soutenu et encouragé malgré la distance géographique, à ma femme, Sun Lijuan, pour sa grande patience, son soutien permanent, ses encouragements dans les moments difficiles et pour les bonheurs partagés le reste du temps.

Sans vous tous, ce manuscrit n'aurait pas pu voir le jour !

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	1
1 MODELISATION DETERMINISTE DU CHAMP ACOUSTIQUE EN MILIEU INHOMOGENE	5
1.1 INTRODUCTION	6
1.1.1 Problématique	6
1.1.2 Equation d'onde dans les milieux inhomogènes et aléatoires.....	8
1.1.3 Etat de l'art	10
1.2 MÉTHODE DE RAYONS EN MILIEU INHOMOGÈNE	14
1.2.1 Principe de la théorie asymptotique des rayons	14
1.2.2 Théorie de rayons cinématiques : résolution de l'équation eikonale	16
1.2.3 Théorie de rayons dynamiques: résolution de l'équation de transport	21
1.3 METHODE DE RAYONS EN MILIEU ALEATOIRE	25
1.3.1 Modélisation des milieux turbulents homogènes et isotropes	25
1.3.2 Calcul du champ de propagation en milieu turbulent homogène isotrope	26
1.3.3 Propagation d'un faisceau réaliste en milieu turbulent	29
1.4 CONCLUSION ET DISCUSSION	33
2 MODELISATION STOCHASTIQUE DU CHAMP ACOUSTIQUE EN MILIEU ALEATOIRE	35
2.1 INTRODUCTION	36
2.1.1 Modélisation stochastique	36
2.1.2 Etat de l'art	37
2.2 PREDICTION DES FLUCTUATIONS DES TEMPS DE VOL PAR LA METHODE DE PERTURBATION	40
2.2.1 Moyenne des temps de vol.....	41
2.2.2 Covariance spatiale des temps de vol.....	42
2.3 SIMULATION STOCHASTIQUE DES TEMPS DE VOL D'UNE ONDE PLANE.....	48
2.3.1 Méthode de représentation spectrale.....	48
2.3.2 Calculs d'un champ isotrope de fluctuations des temps de vol.....	49
2.3.3 Paramétrisation du modèle	52
2.3.4 Calculs d'un champ anisotrope des fluctuations des temps de vol.....	54
2.4 SIMULATION STOCHASTIQUE D'UN FAISCEAU ACOUSTIQUE EN MILIEU ALEATOIRE	57
2.4.1 Réponse impulsionnelle du champ rayonné en un point d'observation.....	58
2.4.2 Calcul du champ d'un faisceau 2D	61
2.4.3 Configurations d'inspection usuelles en CND	64

2.5	CONCLUSION ET PERSPECTIVES.....	65
3	MODELISATION DE L'INTERACTION ENTRE UN FAISCEAU ACOUSTIQUE ET UNE CIBLE RIGIDE	67
3.1	INTRODUCTION	68
3.1.1	Problématiques	68
3.1.2	Etat de l'art	69
3.1.3	Formulation du problème de diffraction.....	71
3.2	THEORIES GEOMETRIQUES DE LA DIFFRACTION	72
3.2.1	Application de la GTD à la diffraction par une arête rigide.....	73
3.2.2	Solutions uniformes	79
3.3	APPROXIMATION DE KIRCHHOFF.....	83
3.3.1	Formulation de KA.....	83
3.4	UN RAFFINEMENT DE L'APPROXIMATION DE KIRCHHOFF A L'AIDE DE LA THEORIE PHYSIQUE DE LA DIFFRACTION	88
3.4.1	Développement asymptotique de l'intégrale de Kirchhoff	88
3.4.2	Correction de KA à l'aide de la GTD	91
3.5	CONCLUSION.....	93
4	MODELISATION DE L'INTERACTION ENTRE UN FAISCEAU ACOUSTIQUE ET UNE CIBLE ELASTIQUE	95
4.1	INTRODUCTION	96
4.2	LES CONDITIONS AUX LIMITES NON PARFAITEMENT REFLECHISSANTES.....	98
4.2.1	Impédance acoustique	98
4.2.2	Coefficient de réflexion à l'interface fluide/solide	99
4.3	THEORIES GEOMETRIQUES DE LA DIFFRACTION AVEC CONDITIONS AUX LIMITES HOMOGENES MIXTES	101
4.3.1	Diffraction par un dièdre d'impédance finie	102
4.3.2	Solutions uniformes	106
4.4	APPLICATION DE L'APPROXIMATION DE KIRCHHOFF AU CAS D'UNE CIBLE ELASTIQUE.....	109
4.4.1	Condition au limite générale.....	110
4.4.2	Approximation de Kirchhoff générale.....	110
4.4.3	Développement asymptotique de l'approximation de Kirchhoff générale.....	112
4.4.4	Discussion au sujet de l'approximation de Kirchhoff générale.....	113
4.5	CONCLUSION.....	116
5	INTEGRATION LOGICIELLE ET VALIDATION EXPERIMENTALE D'UN MODELE COMPLET DE TELEMETRIE ULTRASONORE	119
5.1	INTRODUCTION	120
5.2	INTEGRATION LOGICIELLE D'UN MODELE COMPLET DE TELEMETRIE ULTRASONORE DANS CIVA	121
5.2.1	Calcul du champ rayonné dans un milieu fluide.....	121
5.2.2	Calcul de l'écho spéculaire	123

5.3	VALIDATIONS EXPERIMENTALES.....	126
5.3.1	Objectif	126
5.3.2	Description des procédures expérimentales	126
5.3.3	Modélisation de la télémétrie avec CIVA.....	132
5.3.4	Comparaison simulation/expérience	134
5.4	CONCLUSION ET PERSPECTIVES.....	147
CONCLUSION		149
ANNEXES		153
A 1. SYSTEME DU TRACE DE RAYONS CINEMATQUES		155
A 2. JACOBIEN DE RAYONS ET TRACE DE RAYONS DYNAMIQUES		157
A 3. PROPRIETES DES CHAMPS ALEATOIRES		161
A 4. PROBLEME CANONIQUE DE DIFFRACTION		163
BIBLIOGRAPHIE		169

INTRODUCTION

Le Contrôle Non Destructif (CND) par ultrasons joue un rôle de plus en plus important dans des secteurs d'applications très divers (nucléaire, aéronautique, pétrolier, génie civil, etc.) pour caractériser les parties sensibles des pièces industrielles et s'assurer de leur conformité par rapport à un cahier des charges. La conception d'un réacteur à neutrons rapides refroidi par du sodium liquide (RNR-Na) constitue un nouveau défi en matière de CND. Le RNR-Na est une des technologies potentielles de réacteur de 4^{ème} génération actuellement à l'étude en vue de disposer d'une énergie durable, compétitive, sûre et fiable. Le RNR-Na est la filière retenue pour le prototype français ASTRID [1,2] (Advanced Sodium Technological Reactor for Industrial Demonstration) prévu horizon 2020 (voir Figure i).

Un RNR est un réacteur dont l'énergie des neutrons au niveau du cœur n'est pas modérée et qui nécessite donc l'utilisation d'un caloporteur à faible section de capture neutronique tel que le sodium liquide [3,4]. C'est pour cette raison et parce qu'il possède les propriétés attendues d'un caloporteur (bonnes facultés thermohydrauliques, faible nocivité et faible coût) que le sodium liquide a été choisi comme caloporteur du circuit de refroidissement du prototype ASTRID. Le sodium liquide présente néanmoins certains inconvénients importants que sont sa réactivité à l'air et surtout à l'eau et son opacité qui rend l'inspectabilité des réacteurs plus difficile que dans l'eau ou dans un gaz.

Les attendus du cahier des charges du projet RNR-Na requièrent un niveau accru de sûreté, de fiabilité, de disponibilité et de préservation de l'investissement. Des nouvelles techniques d'inspection doivent être développées dès l'origine de la conception des réacteurs RNR-Na dans le but de leur surveillance continue pendant le fonctionnement courant (sodium à 550°C) et de leurs contrôles périodiques pendant une phase d'arrêt de réacteur (sodium à 180-200°C). Les méthodes ultrasonores se sont avérées être, à l'issue des retours d'expériences des inspections des réacteurs à sodium existants (notamment Phénix et Superphénix), des techniques pertinentes de surveillance des structures immergées en sodium liquide. Pour la surveillance du cœur, de son supportage et des autres structures internes en sodium, l'utilisation générique de méthodes ultrasonores est donc retenue. Ceci correspond à la mise au point de traducteurs ultrasonores fonctionnant aux hautes températures, à la définition d'architectures acoustiques adaptées (modélisations d'inspections et qualifications par essais en eau puis en sodium), L'une des techniques de surveillance choisies, à développer et à mettre en œuvre pour la surveillance des structures à l'intérieur du réacteur en matière d'imagerie, est la « télémétrie ultrasonore » sous sodium dont le résultat visé est de déterminer la distance précise entre le traducteur et une structure à inspecter. La télémétrie permettrait donc d'assurer la surveillance continue avec l'obligation de suivi des paramètres représentatifs des initiateurs potentiels d'accident graves en temps réel. Cette technique consiste à positionner un transducteur ultrasonore au cœur du réacteur à l'aide d'une perche verticale (voir Figure i) et à émettre un faisceau ultrasonore en direction d'une structure à contrôler. Ce faisceau ultrasonore se propage ensuite dans le milieu sodium liquide et va interagir avec la structure visée. Après cette interaction, une onde sera rétrodiffusée par cette structure (voir Figure ii) et enfin détectée par le même

transducteur. En mesurant le temps de vol du signal reçu, la distance entre la surface du transducteur et la structure inspectée pourra être évaluée à partir de la connaissance de la vitesse du son dans le milieu.

La télémétrie est notamment opérée en sortie de cœur de réacteur, là où sont présents de forts gradients de température du sodium. Or, du fait de la circulation du sodium avec une vitesse maximale de déplacement de l'ordre de 10 m/s (cette vitesse est négligeable devant la vitesse de propagation des ultrasons ; en revanche, elle induit une variation aléatoire de température dans l'espace et dans le temps), le gradient de température du sodium n'est pas stationnaire homogène, mais perturbé par des fluctuations aléatoires de température qui peuvent atteindre localement 50 °C, ce qui correspond à une fluctuation aléatoire de vitesse du son d'environ 1% dans l'espace et dans le temps. Comprendre les effets des fluctuations aléatoires de température nous permettra de déterminer des tolérances sur les résultats du contrôle par la télémétrie. Pour cela, nous devons faire intervenir la simulation de la télémétrie en tenant compte des configurations du contrôle réel ainsi que des inhomogénéités de la vitesse du son en sodium. En plus, la simulation de la télémétrie permet à la fois de réaliser des contrôles virtuels dans les configurations réalistes, comprendre les phénomènes complexes de propagation et d'interaction faisceau/obstacle, participer à la démonstration de la faisabilité de méthodes d'inspection ou à l'établissement de dossiers de qualification, et optimiser les différents paramètres de nouvelles sondes.

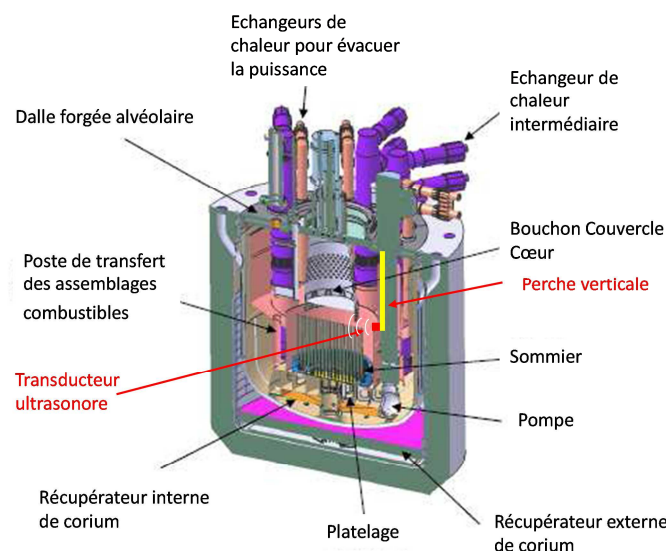


Figure i : Primo-projet de design de réacteur ASTRID et exemple d'instrumentation de la télémétrie au cœur du réacteur.

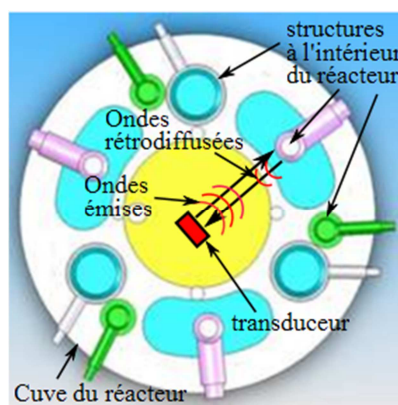


Figure ii : Principe de la télémétrie.

L'objectif de cette thèse est de développer un outil de simulation de la télémétrie permettant de prédire l'imagerie ultrasonore des structures immergées au cœur du réacteur en sodium en état de fonctionnement. Cet outil de simulation est à intégrer au sein du logiciel CIVA développé par le CEA, LIST. CIVA [5, 6] est une plate-forme d'expertise pour le CND constituée d'un ensemble de modules de simulation en ultrasons, courants de Foucault, radiographie X. Les outils existants de simulation ultrasonore dans CIVA sont consacrés principalement à la modélisation de la propagation d'ondes élastiques au sein de matériaux solides et à leur interaction avec des défauts de type fissures, cavités ou inclusions. Pour les besoins de la simulation de la télémétrie, de nouveaux modèles sont à développer et à coupler avec les modélisations déjà existantes dans CIVA.

Pour réaliser une modélisation complète de la télémétrie en sodium liquide, il est d'abord nécessaire d'étudier la propagation d'une onde ultrasonore dans du sodium liquide subissant des fluctuations de température et de trouver des solutions pertinentes aux divers problèmes d'interaction d'un faisceau ultrasonore avec les structures solides immergées. Ces études ont pour finalité le développement de nouveaux modèles susceptibles d'être intégrés au sein de la plate-forme de simulation CIVA. Deux thématiques de recherche principales ont été identifiées :

- modélisation du champ acoustique en sodium liquide subissant des fluctuations aléatoire de température et donc de célérité du son,
- simulation des échos résultant de l'interaction de l'onde acoustique avec les objets immergés, avec prise en compte notamment de phénomènes de réflexion spéculaire et de diffraction par des arêtes.

Les deux premiers chapitres de ce manuscrit sont consacrés à la première thématique et les deux suivants à la seconde.

En vue de modéliser la propagation en sodium liquide, nous considérons que ce milieu est un fluide inhomogène et aléatoire dont l'inhomogénéité pourrait être décomposée en deux parties: une partie inhomogène déterministe (par exemple un gradient de température constant) et une partie fluctuante aléatoire. Nous décidons donc de développer un modèle différent pour simuler séparément chacune des deux contributions inhomogènes.

Le Chapitre 1 décrit le développement d'un modèle déterministe. Son entrée est donc une cartographie parfaitement connue de vitesse du son. Après revue des nombreuses méthodes existantes de calcul du champ de propagation d'une onde acoustique haute fréquence, nous choisissons de développer un modèle basé sur la méthode de rayons qui considère que le champ acoustique (temps de vol et amplitude) se propage le long des rayons acoustiques.

Nous nous intéressons au Chapitre 2 à la propagation d'onde en milieu aléatoire afin de simuler la seconde contribution inhomogène de notre milieu d'étude. Un modèle stochastique fondé sur un algorithme de type Monte-Carlo est développé. L'entrée de ce modèle stochastique n'est plus déterministe mais est constituée des moments statistiques du champ de propagation en milieu aléatoire, dont une expression analytique sera obtenue. Le champ acoustique en milieu inhomogène aléatoire est finalement modélisé à partir du champ dans un milieu homogénéisé, calculé par le modèle déterministe, et ce en modifiant les temps de parcours des rayons par incorporation d'une correction fournie par le modèle stochastique. Les résultats issus des modèles déterministe et stochastique en milieu aléatoire sont ensuite comparés afin de valider théoriquement le modèle stochastique.

En vue de modéliser l'interaction onde acoustique/objets immergés, des modèles classiques de diffraction sont d'abord évalués, au Chapitre 3, dans un premier temps dans le cadre de structures rigides. En effet, les cibles rencontrées en télémétrie sont caractérisées par des conditions d'impédance relativement proches de celles de surfaces rigides. Nous constatons que, parmi les approches précédentes, la théorie géométrique de la diffraction

(GTD) et l'approximation de Kirchhoff (KA) apparaissent comme complémentaires. En combinant les approches GTD et KA de sorte à ne conserver que leurs avantages, nous développons un modèle hybride (appelé approximation de Kirchhoff raffinée) en utilisant une procédure similaire à la théorie physique de la diffraction (PTD). Le modèle Kirchhoff raffiné sera confronté à la solution exacte dans le cas d'un défaut semi-infini rigide.

Dans le Chapitre 4, nous étendons dans un premier temps le modèle de diffraction GTD pour traiter l'interaction onde acoustique/cible d'impédance finie. Nous nous intéressons aussi au développement d'un modèle Kirchhoff général pour une cible d'impédance finie. La comparaison des différents modèles aboutit au choix d'un modèle d'interaction en vue du calcul d'échos pour la télémétrie.

Le dernier chapitre est dédié à la mise au point d'un modèle intégré complet de télémétrie et à sa validation. Cet outil de simulation de la télémétrie, intégré dans la plateforme logicielle de modélisation CIVA, est le fruit du couplage du modèle stochastique de propagation (Chapitre 2) et du modèle d'interaction faisceau/cible choisi (Chapitre 4). La validation de cet outil de simulation est réalisée à l'aide d'essais expérimentaux en eau puis en sodium sur une maquette contenant des cibles typiques de la télémétrie.

1

MODELISATION DETERMINISTE DU CHAMP ACOUSTIQUE EN MILIEU INHOMOGENE

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à la modélisation déterministe de la propagation du champ acoustique à travers un milieu fluide inhomogène. La modélisation déterministe consiste à calculer le champ de propagation à partir d'une cartographie de vitesse connue comme entrée et à fournir une solution unique qui corresponde à l'entrée. Dans un premier temps, nous allons étudier les différentes approches déterministes analytiques afin d'identifier la méthode plus pertinente en comparant les conditions de validité de plusieurs méthodes. Dans le cadre de cette étude, nous avons sélectionné la méthode des rayons fondée sur l'acoustique géométrique. En faisant l'hypothèse de haute fréquence, cette méthode permet de considérer que l'énergie du champ se propage le long de certains trajets que l'on appelle rayons, et l'équation d'onde est ensuite résolue, ici dans le cas d'un milieu inhomogène subissant une fluctuation spatiale de vitesse du son. Les temps de vol et les amplitudes associés aux rayons sont alors calculés le long de chaque rayon, pour une cartographie de vitesse donnée, par la résolution de systèmes d'équations différentielles. Cependant, le milieu de propagation réel subissant une fluctuation aléatoire de température dans l'espace et dans le temps, il est difficile de décrire la situation de façon déterministe, et une hypothèse supplémentaire est alors nécessaire : le milieu de propagation est assimilé à la somme de deux contributions, une partie inhomogène déterministe (gradient de température constant) et une partie fluctuante aléatoire. La partie aléatoire du milieu est modélisée à partir d'un modèle de turbulence thermique qui génère des champs thermiques inhomogènes par des tirages aléatoires en respectant les propriétés caractéristiques du milieu, notamment la moyenne, la variance de température et la taille moyenne des inhomogénéités spatiales (quantifiée par une grandeur appelée longueur caractéristique, illustrée en Figure 1-3).

La méthode de rayons est ensuite appliquée pour évaluer l'influence des variations aléatoires du milieu de propagation sur les temps de vol et les amplitudes du champ de propagation d'une onde incidente plane puis sphérique. Le cas de la propagation d'un faisceau réaliste émis par un transducteur plan dans un milieu aléatoire est ensuite étudié.

1.1 INTRODUCTION

1.1.1 Problématique

Afin de simuler numériquement la télémétrie ultrasonore dans un réacteur (Figure 1-1), il est nécessaire de développer tout d'abord un outil de simulation qui prédit la propagation d'onde acoustique à l'intérieur de la cuve du réacteur remplie de sodium liquide (fluide caloporteur des réacteurs à neutrons rapide), dans deux configurations de fonctionnement. La télémétrie doit en effet pouvoir être opérée dans les cas du réacteur à l'arrêt (inspections périodiques) et du réacteur en fonctionnement (surveillance continue). Lorsque le réacteur est à l'arrêt, la variation spatiale de température est relativement faible ($< 0,2\text{ }^{\circ}\text{C}$) et la circulation du sodium liquide est très lente (de l'ordre du m/s), et l'hypothèse d'une température spatialement homogène dans le milieu de propagation est raisonnable. En revanche, lorsque le réacteur est en fonctionnement, la télémétrie est notamment effectuée en sortie de cœur, là où sont présents de forts gradients de température du sodium (voir Figure 1-1-c). De plus, du fait de la circulation du sodium avec une vitesse maximale de déplacement de l'ordre de 10 m/s, le gradient de température du sodium n'est pas stationnaire homogène : il est perturbé par des fluctuations aléatoires qui peuvent atteindre localement $50\text{ }^{\circ}\text{C}$, ce qui induit une fluctuation aléatoire de vitesse du son d'environ 1% dans l'espace et dans le temps (la vitesse du son dans le sodium variant avec la température). Ces inhomogénéités de vitesse acoustique génèrent des variations aléatoires de temps de vol et d'amplitude des échos reçus qu'il faut savoir quantifier aux fréquences d'inspection usuelles (0,5 à 5MHz).

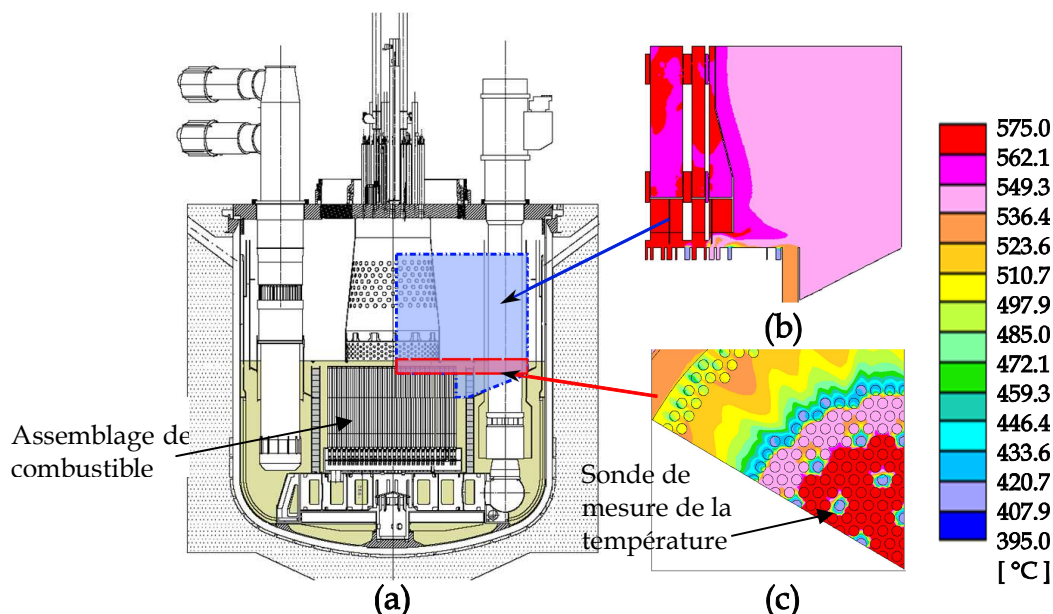


Figure 1-1: Résultats de calculs thermodynamiques près du cœur du réacteur (source AREVA) : (a) – schéma du réacteur avec les zones colorées où les calculs des champs de température ont été effectués ; (b) – une coupe verticale du champ de température, la température est représentée par le code de couleur ; (c) – une coupe horizontale du champ de température, se situant juste au dessus de l'assemblage des combustibles fissiles.

Dans cette optique, il faut donc tout d'abord modéliser le sodium liquide (milieu fluide inhomogène et aléatoire) par un milieu de propagation représentatif de la situation rencontrée dans un réacteur à sodium liquide. Comme indiqué dans l'introduction, l'inhomogénéité pourrait être décomposée en deux parties : une partie inhomogène déterministe (stationnaire) avec un gradient de vitesse par exemple ; et une partie fluctuante aléatoire (le champ correspondant étant appelé champ turbulent ou champ aléatoire) où la fluctuation de température varie aléatoirement dans l'espace mais toutefois avec une certaine

continuité spatiale. La Figure 1-2 montre l'exemple d'un tel milieu composé d'un gradient de vitesse comme partie déterministe et d'une composante aléatoire. Un autre exemple (indépendant de celui de la Figure 1-2) de champ thermique aléatoire 1D est montré en Figure 1-3. Ce champ thermique aléatoire n'est caractérisé pas seulement par sa variation maximale de température, mais aussi par la longueur caractéristique de température, noté l_τ , appelée aussi la longueur de corrélation, qui représente l'échelle géométrique de l'inhomogénéité de température (illustrée en Figure 1-3) et est représentative de la taille moyenne des inhomogénéités spatiales de température. Dans la situation réelle, cette valeur varie entre 50mm et 200mm, mais elle est supposée, dans la modélisation du milieu, être constante dans tout l'espace.

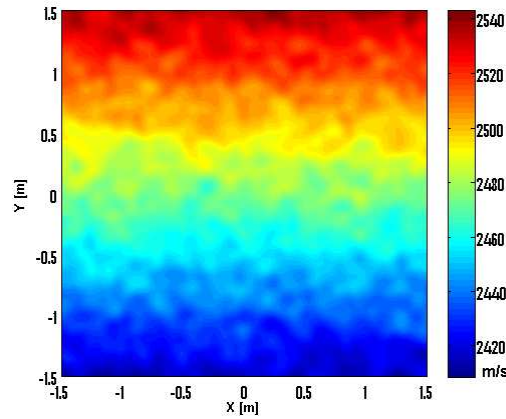


Figure 1-2: Exemple de modélisation d'un milieu fluide inhomogène et aléatoire composé d'un champ inhomogène de gradient de vitesse constant dirigé dans la direction y et d'un champ aléatoire de vitesse : cartographie spatiale en deux dimensions (x, y) de la vitesse du son dans un tel milieu.

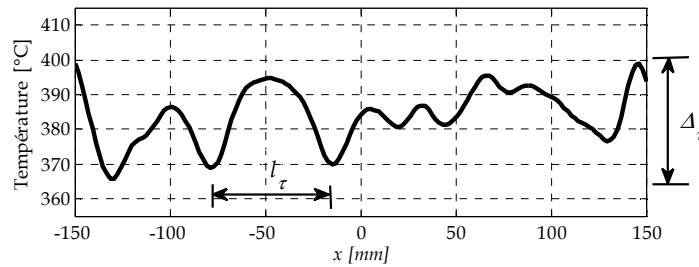


Figure 1-3: Modélisation de champ thermique aléatoire en sodium liquide caractérisé par sa fluctuation maximale de température $\Delta\tau$ et sa longueur caractéristique de température l_τ .

La conversion entre la température et la vitesse du son en sodium liquide est donnée par la relation [7] :

$$c(\mathbf{x}, \tau) = 2577,2 - 0,5234 \times \tau(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (1.1)$$

Avec $\tau(\mathbf{x})$ le champ thermique en °C et $c(\mathbf{x}, \tau)$ le champ de vitesse en m/s, où \mathbf{x} représente le triplet des coordonnées spatiales du point de mesure. Cette relation a été validée [7] pour $100 < \tau < 370^\circ\text{C}$, mais cette relation est supposée rester valide entre 370°C et 1400°C , comme cela est fait dans la référence [7] (voir la Figure 1-4). Cette propriété est très largement utilisée dans toutes les techniques de métrologie et de visualisation sous sodium. A noter que nous avons fait l'hypothèse que les longueurs caractéristiques l_τ des champs de température et de vitesse (taille moyenne des inhomogénéités spatiales respectivement de température et de vitesse) sont identiques. Une fois le champ de vitesse obtenu à partir d'un champ de température (ce qui modélise donc ici un milieu fluide faiblement inhomogène et aléatoire),

le calcul de la propagation d'une onde acoustique dans un tel milieu doit être effectué, en tenant compte de ce qui est appelé un régime de propagation.

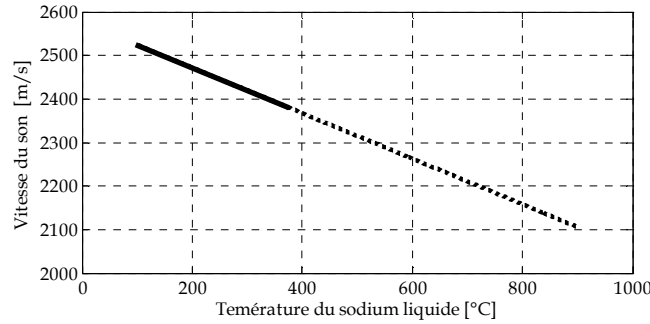


Figure 1-4: Vitesse du son en sodium liquide en fonction de la température, cette relation a été validée pour $100 < T < 370$ °C (ligne continue), mais elle est supposée valide au-delà de 370°C (ligne pointillée).

Un régime de propagation est défini par les propriétés intrinsèques du milieu (par exemple la variance et la longueur caractéristique de température pour un champ thermique) et la source acoustique (par exemple la bande de fréquence). Différents rapports de la longueur caractéristique l_r à la longueur d'onde λ_0 (liée à la fréquence centrale de la source) conduisent principalement à trois régimes de propagation différents : le régime des basses fréquences pour lequel la longueur caractéristique est nettement plus petite que la longueur d'onde ($l_r \ll \lambda_0$) ; le régime des moyennes fréquences pour lequel les échelles de variation de vitesse sont de taille comparable à la longueur d'onde ($l_r \sim \lambda_0$) et, enfin, le régime des hautes fréquences pour lequel la longueur caractéristique est supérieure à la longueur d'onde ($l_r \gg \lambda_0$). Afin de choisir une méthode pertinente pour la modélisation de la propagation d'onde dans un milieu inhomogène et aléatoire, il faut donc bien déterminer le régime de propagation correspondant à ce milieu, puisque les phénomènes physiques dominants diffèrent d'un régime à l'autre. Dans notre cas d'étude, la longueur d'onde varie entre 0,5 et 2,5 mm, la longueur caractéristique est de l'ordre de 100 à 200 mm, ce qui correspond donc au régime des hautes fréquences pour lequel la propagation se déroule avec une faible diffusion par les hétérogénéités et donc une forte transmission selon la direction de propagation initiale.

Rappelons que l'objectif de la modélisation est de déterminer l'amplitude et le temps de vol, $P(\mathbf{x}, t)$ et $T(\mathbf{x})$, d'un champ de pression acoustique qui se propage dans un milieu fluide inhomogène et aléatoire. Puisque la propagation d'onde acoustique est perturbée par l'inhomogénéité et la fluctuation aléatoire de vitesse, l'étude peut être restreinte à l'obtention des variations des amplitudes et des temps de vol par rapport à ceux qui seraient obtenus lors de la propagation dans un milieu homogène. Pour ce faire, nous devons résoudre l'équation d'onde dans un milieu inhomogène qui est donnée dans la section suivante. Différentes méthodes, qui permettent de résoudre une telle équation, sont présentées dans l'état de l'art (§1.1.3).

1.1.2 Equation d'onde dans les milieux inhomogènes et aléatoires

Nous allons établir les équations fondamentales de la propagation d'onde acoustique dans un milieu inhomogène et définir les grandeurs importantes. Nous définissons la pression acoustique $p(\mathbf{x}, t)$ en un point \mathbf{x} de l'espace $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$ au temps t . Dans notre cas d'étude, l'équation scalaire de la propagation des ondes acoustiques régissant la pression et ses variations s'écrit en espace libre (hors de la zone source) :

$$\frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = K(\mathbf{x}) \nabla \cdot \left[\frac{\nabla p(\mathbf{x}, t)}{\rho(\mathbf{x})} \right], \quad (1.2)$$

où $K(\mathbf{x})$ est le module d'incompressibilité, où $\rho(\mathbf{x})$ est la masse volumique et où ∇ désigne le gradient. On suppose que les variations de masse volumique $\rho(\mathbf{x})$ sont négligeables par rapport aux variations de vitesse $c(\mathbf{x})$: ρ est constante et $K(\mathbf{x}) = \rho c^2(\mathbf{x})$. On obtient alors l'équation d'onde :

$$\nabla^2 p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2}. \quad (1.3)$$

On suppose en outre un champ de vitesse $c(\mathbf{x})$ dont l'indice de réfraction est perturbé par un champ aléatoire $\varepsilon(\mathbf{x})$ de moyenne nulle de la façon suivante :

$$\frac{1}{c^2(\mathbf{x})} = \frac{1}{c_0^2} [1 + \varepsilon(\mathbf{x})], \quad (1.4)$$

où c_0 est la vitesse adiabatique moyenne. La transformée de Fourier en temps du champ de pression s'écrit :

$$p(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathbf{x}, t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.5)$$

où ω est la pulsation. Nous obtenons alors l'équation d'Helmholtz en milieu inhomogène :

$$\nabla^2 p(\mathbf{x}) + k^2 (1 + \varepsilon(\mathbf{x})) p(\mathbf{x}) = 0, \quad (1.6)$$

où $k = \omega/c_0 = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde du milieu homogène moyen de vitesse c_0 . En espace libre, l'équation (1.6) est équivalente à l'équation intégrale :

$$p(\mathbf{x}) = p_0(\mathbf{x}) - k^2 \int_{\mathbb{R}} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varepsilon(\mathbf{x}') p(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (1.7)$$

où \mathbf{x}' est un point courant dans l'espace \mathbb{R} , où $p_0(\mathbf{x})$ est la solution de l'équation (1.6) en milieu homogène ($\varepsilon(\mathbf{x}) = 0$) et où $G(\mathbf{x})$ est la fonction de Green définie par :

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}) &= \frac{e^{ikx}}{4\pi x} \quad \text{pour un problème 3D,} \\ G(\mathbf{x}) &= \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kx) \quad \text{pour un problème 2D,} \end{aligned} \quad (1.8)$$

le problème 2D signifiant que la solution est invariante suivant une direction de l'espace. L'inhomogénéité de vitesse qui se traduit par le terme $\varepsilon(\mathbf{x}')$ dans l'équation (1.7) peut être considérée comme une source acoustique venant perturber le champ en milieu homogène.

Afin d'établir le lien entre le champ aléatoire $\varepsilon(\mathbf{x})$ et la variation de température, nous allons d'abord exprimer la vitesse du son au carré c^2 pour une température τ voisine de la température moyenne τ_0 par un développement de Taylor au premier degré, on a donc

$$c^2 = c_0^2 + 2c \left(\frac{\partial c}{\partial \tau} \right)_{\tau=\tau_0} \tilde{\tau} + O(\tilde{\tau}^2), \quad (1.9)$$

où $\tilde{\tau} = \tau - \tau_0$ représente la partie fluctuante de la température autour de τ_0 . En divisant les deux membres par c^2 , on aboutit à :

$$\varepsilon = -\frac{2}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial \tau} \right)_{\tau=\tau_0} \tilde{\tau}, \quad (1.10)$$

d'où l'expression de la variance σ_ε^2 des fluctuations du champ aléatoire $\varepsilon(\mathbf{x})$:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \left| -\frac{2}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial \tau} \right)_{\tau=\tau_0} \right|^2 \sigma_\tau^2, \quad (1.11)$$

en fonction de la variance σ_τ^2 des températures $\tau(\mathbf{x})$. La longueur caractéristique associée à $\varepsilon(\mathbf{x})$, noté l_ε , est la même que celle de $\tau(\mathbf{x})$:

$$l_\varepsilon = l_\tau. \quad (1.12)$$

1.1.3 Etat de l'art

La propagation des ondes hautes fréquences à travers les milieux inhomogènes aléatoires est un sujet de grand intérêt avec nombre d'applications pour la tomographie en acoustique aérienne [8,9] ou sous-marine [10], en optique pour la propagation des faisceaux laser dans l'atmosphère [11], ainsi qu'en sismologie [12,13]. Différentes méthodologies ont été mises en œuvre dans ces études : l'approche analytique, l'approche numérique et l'approche empirique. Nous nous intéressons aux approches analytiques dans nos travaux de recherche, ce qui consiste à résoudre l'équation d'onde (1.6) ou (1.7) analytiquement pour des conditions initiales données. Lorsque le champ de vitesse $c(\mathbf{x})$ est décrit de façon déterministe, nous devons alors résoudre les équations d'onde par des méthodes déterministes pour une cartographie de vitesse et une source acoustique données. En revanche, ces méthodes déterministes ne sont plus très pertinentes lorsque le champ $\varepsilon(\mathbf{x})$ est un champ aléatoire, et des méthodes stochastiques ont été développées dans la littérature afin de décrire les comportements statistiques du champ de propagation.

1.1.3.1 Méthodes de propagation d'onde en milieu inhomogène

Pour résoudre l'équation d'onde dans un milieu inhomogène, une multitude d'approches peut être appliquée : la méthode des rayons (ou l'optique géométrique [14]), la méthode de faibles perturbations de Born [15], l'approche de Rytov [16] et l'approximation parabolique [17].

- La méthode de rayons [14], qui n'est valide qu'en haute fréquence, fait l'hypothèse que la fluctuation de vitesse varie lentement sur des distances de l'ordre de la longueur d'onde ; l'onde se comporte donc localement comme une onde plane :

$$p(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x}) e^{ik_0 T(\mathbf{x})}, \quad (1.13)$$

et l'énergie de l'onde se propage le long de trajets, appelés rayons. Ces rayons sont calculés par la résolution d'une équation différentielle partielle, l'équation eikonale :

$$[\nabla T(\mathbf{x})]^2 = c_0^{-2} [1 + \varepsilon], \quad (1.14)$$

où $\varepsilon(\mathbf{x})$ est toujours le champ aléatoire définie en équation (1.4), $T(\mathbf{x})$ est le ou les temps de vol au point \mathbf{x} (à noter que la notation T représente le temps de vol alors que la notation t représente la variable temps de manière plus générale), qui peuvent être évalués le long du ou des rayons ; les amplitudes $P(\mathbf{x})$ du champ sont ensuite obtenues par la résolution de l'équation de transport :

$$2\nabla P(\mathbf{x}) \cdot \nabla T(\mathbf{x}) + P(\mathbf{x}) \nabla^2 T(\mathbf{x}) = 0. \quad (1.15)$$

Cette méthode, simple à mettre en œuvre et permettant de décrire visuellement la propagation d'onde par le biais des rayons est très largement appliquée en sismologie [12] pour la localisation des ressources naturelles et en modélisation du contrôle non

destructif **18** afin de détecter des défauts dans une pièce, mais ne prend pas en compte les phénomènes de diffraction issus de l'inhomogénéité de vitesse du milieu.

- La méthode des faibles perturbations de Born [15] suppose que le champ acoustique est diffracté une seule fois en un point \mathbf{x}' dans l'espace \mathbb{R}^3 par l'inhomogénéité du milieu ; on peut alors remplacer $p(\mathbf{x}')$ dans l'équation (1.7) par le champ acoustique en milieu homogène $p_0(\mathbf{x}')$ et on obtient donc

$$p(\mathbf{x}) = p_0(\mathbf{x}) - k^2 \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varepsilon(\mathbf{x}') p_0(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (1.16)$$

où la valeur moyenne de $p(\mathbf{x})$ est égale à $p_0(\mathbf{x})$, la pression en milieu homogène, puisque $\langle \varepsilon \rangle = 0$. Pour que cette hypothèse de diffraction simple soit valable, les fluctuations du champ de vitesse doivent être suffisamment faibles (l'écart-type σ_ε du champ $\varepsilon(\mathbf{x})$ doit ainsi vérifier $\sigma_\varepsilon \ll 1$). Bien que très intéressante, cette méthode ne prend pas en compte la diffraction multiple, et, l'approximation étant limitée à des inhomogénéités de taille inférieure à la longueur d'onde, elle n'est donc pas valable en régime de propagation haute fréquence.

- L'approche de Rytov [16] considère que « l'amplitude complexe » $\Upsilon(\mathbf{x})$ de l'onde est définie par

$$p(\mathbf{x}) = \exp[\Upsilon(\mathbf{x})]. \quad (1.17)$$

Sachant que $p(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x})e^{-ikc_0T(\mathbf{x})}$, nous avons donc :

$$\Upsilon(\mathbf{x}) = \ln[P(\mathbf{x})] + ikc_0T(\mathbf{x}). \quad (1.18)$$

Cette amplitude complexe contient donc à la fois l'amplitude $P(\mathbf{x})$ de la pression du champ acoustique et le temps de vol correspondant $T(\mathbf{x})$. L'amplitude complexe "perturbée" en milieu inhomogène $\Upsilon'(\mathbf{x})$ est telle que :

$$p(\mathbf{x}) = p_0(\mathbf{x}) \exp[\Upsilon'(\mathbf{x})] \quad \text{avec} \quad \Upsilon'(\mathbf{x}) = \ln \left[\frac{P(\mathbf{x})}{P_0(\mathbf{x})} \right] + ikc_0[T(\mathbf{x}) - T_0(\mathbf{x})], \quad (1.19)$$

où $P_0(\mathbf{x})$ et $T_0(\mathbf{x})$ sont respectivement l'amplitude de pression et le temps de vol en milieu homogène. En reportant l'équation (1.19) dans l'équation d'onde (1.6), on obtient

$$\nabla^2 [p(\mathbf{x}) \Upsilon'(\mathbf{x})] + k^2 p_0(\mathbf{x}) \Upsilon'(\mathbf{x}) = -p_0(\mathbf{x}) \left\{ [\nabla \Upsilon'(\mathbf{x})]^2 + k^2 \varepsilon(\mathbf{x}) \right\}, \quad (1.20)$$

qui est équivalente à l'équation intégrale

$$p_0(\mathbf{x}) \Upsilon'(\mathbf{x}) = - \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \left\{ [\nabla \Upsilon'(\mathbf{x})]^2 + k^2 \varepsilon(\mathbf{x}') \right\} p_0(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'. \quad (1.21)$$

En négligeant le terme $[\nabla \Upsilon'(\mathbf{x})]^2$, nous obtenons la solution de l'approximation du premier ordre de Rytov:

$$\Upsilon'(\mathbf{x}) = \Upsilon_1(\mathbf{x}) = - \frac{k^2}{p_0(\mathbf{x})} \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \varepsilon(\mathbf{x}') p_0(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad (1.22)$$

où $\Upsilon_1(\mathbf{x})$ est la première approximation de $\Upsilon'(\mathbf{x})$. Comme les termes plus élevés de $\Upsilon'(\mathbf{x})$ sont négligés dans cette approximation, elle est donc valable lorsque les perturbations du champ de vitesse sont faibles $\sigma_\varepsilon \ll 1$. Cette méthode prend en compte toutes les diffractions induisant une faible déviation par rapport à la direction transmise,

négligeant notamment la rétrodiffusion. Théoriquement l'approximation au premier ordre de Rytov est meilleure que celle de Born car elle contient certains termes de diffraction multiple. L'approche de Rytov est adaptée au régime de propagation haute fréquence, contrairement à l'approche de Born.

- L'approximation parabolique [17] pour la résolution de l'équation de propagation consiste à négliger la dérivée axiale seconde de la pression devant son gradient :

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(\mathbf{x}_\perp, x) \right| \ll \left| 2ik \frac{\partial p(\mathbf{x}_\perp, x)}{\partial x} \right|, \quad (1.23)$$

où x est la direction de propagation, \mathbf{x}_\perp est le plan perpendiculaire à la direction de propagation (voir la Figure 1-5), x et \mathbf{x}_\perp formant la base de coordonnées $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_\perp, x)$. Cette approximation est basée sur l'hypothèse que l'onde se propage autour d'une direction déterminée en négligeant les ondes rétrodiffusées par le milieu. Son intérêt vient de ce qu'elle permet de traiter la propagation comme un problème de Cauchy (problème constitué d'une équation différentielle dont on recherche une solution vérifiant une condition initiale) dont la résolution numérique est facile. La forme parabolique de l'équation d'onde est

$$2ik \frac{\partial P(\mathbf{x})}{\partial x} + \frac{\partial^2 P(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_\perp^2} + k^2 \varepsilon(\mathbf{x}) P(\mathbf{x}) = 0, \quad (1.24)$$

Où $p(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x}) \exp(ikx)$, prend la forme intégrale suivante

$$p(\mathbf{x}) = p_0(\mathbf{x}) - \frac{k^2}{4\pi} \int_0^x \frac{\exp[ik(x-x')]}{x-x'} \int_{\mathbf{x}_\perp} \exp \frac{ik(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}'_\perp)}{2(x-x')} \varepsilon(\mathbf{x}') p(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'_\perp dx', \quad (1.25)$$

où le domaine d'intégration est limité entre la source $x = 0$ et le plan d'observation $x = X$. L'approximation parabolique a connu un grand succès dans les problèmes de propagation électromagnétique, en fournissant des précisions de prédiction inaccessibles avec les modèles de rayons. Par contre, sa résolution numérique doit être traitée avec soin pour obtenir des temps de calcul raisonnables.

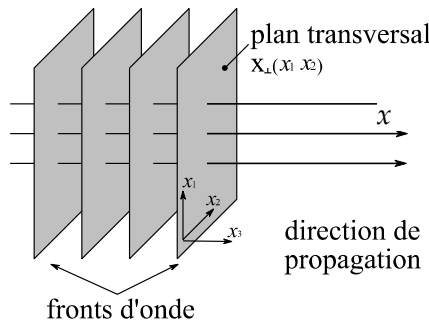


Figure 1-5: Définition du plan transversal et de la direction de propagation

- Comme les conditions de validité de l'approche de Rytov et de l'approximation parabolique sont identiques (faible inhomogénéité : $\sigma_e \ll 1$ et pas de rétrodiffusion), Rytov [17] a donc proposé de fusionner les deux méthodes créant l'approximation de Rytov parabolique qui prend la forme suivante pour une onde plane

$$\Upsilon_1(\mathbf{x}) = -\int_0^x \int_{\mathbf{x}_\perp} f(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}'_\perp, x - x') \varepsilon(\mathbf{x}') p_0(\mathbf{x}'_\perp, x') d\mathbf{x}'_\perp dx',$$

$$\text{avec } f(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}'_\perp, x - x') = -\frac{k^2}{4\pi} \frac{1}{(x - x')} \exp\left[\frac{ik}{2} \frac{(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}'_\perp)^2}{(x - x')}\right]. \quad (1.26)$$

L'approche de Rytov parabolique permet d'avoir les avantages de deux approches précédentes, ce qui nous permet de résoudre facilement l'approche de Rytov et donc d'accéder à la fois la fluctuation d'amplitude et de temps de vol.

- Ces dernières années, avec la montée en puissance des moyens informatiques, les méthodes numériques (différences finies [19,20], éléments finis [21], ...) jouent désormais un rôle significatif dans la modélisation de la propagation d'onde en milieu complexe. Cependant le temps de calcul correspondant pour un modèle 3D reste toujours considérable.

1.1.3.2 Stratégie adoptée

Afin de choisir parmi les différentes méthodes présentées précédemment la méthode plus pertinente adaptée à notre cas d'étude, nous allons analyser les conditions de validité de chaque méthode, en définissant tout d'abord deux paramètres importants qui permettent de séparer les zones de validité des méthodes.

En effet, sachant que la méthode de rayons ne permet pas de calculer la diffraction du champ causée par l'inhomogénéité du milieu, quantifier le niveau de diffraction à partir duquel le phénomène de diffraction peut être négligé est important pour fixer les conditions de validité de la méthode de rayons. Selon Flatté [22] et Fiorina [23], un paramètre caractéristique de la diffraction par un milieu turbulent et isotrope est donnée par

$$\Lambda = \frac{x}{kl_\varepsilon^2}, \quad (1.27)$$

où x est la distance de propagation, $k = \omega/c_0$ le nombre d'onde moyen et l_ε la longueur caractéristique de l'inhomogénéité du milieu. Quand $\Lambda > 1$, cela signifie que le niveau de diffraction est suffisamment important et l'application de la méthode de rayons n'est plus pertinente. Par conséquent $\Lambda = 1$ peut être considéré comme la ligne de séparation des domaines de validité de la méthode de rayons et l'approche de Rytov parabolique. Cependant l'approche de Rytov parabolique n'est valide que pour des fluctuations de vitesse du son très faibles et on peut quantifier ce niveau de fluctuations de vitesse par un autre paramètre caractéristique selon Fiorina [23] :

$$\Phi = \sqrt{2k^2 \sigma_\varepsilon^2 x l_\varepsilon}, \quad (1.28)$$

où σ_ε^2 est la variance des inhomogénéités du milieu. Quand $\Phi > 1$, l'onde subit une atténuation exponentielle et la forte quantité de bruit rend le signal incohérent. Il est alors impossible de définir la notion de temps d'arrivée avec l'approche de Rytov parabolique et une zone de saturation, pour laquelle la diffraction par les hétérogénéités est prédominante et le champ de propagation devient complètement incohérent, est donc atteinte. La zone de validité de chaque modèle peut donc être représentée dans le diagramme (Λ, Φ) (voir la Figure 1-6). L'approche de Rytov parabolique est valide dans la zone où $\Phi < 1$ et $\Lambda > 1$; le modèle de rayons est valide dans la zone où $\Lambda < 1$ et $\Lambda\Phi < 1$. En dehors de ces deux zones, on arrive à la zone de saturation dans laquelle aucun des modèles précédents n'est valide.

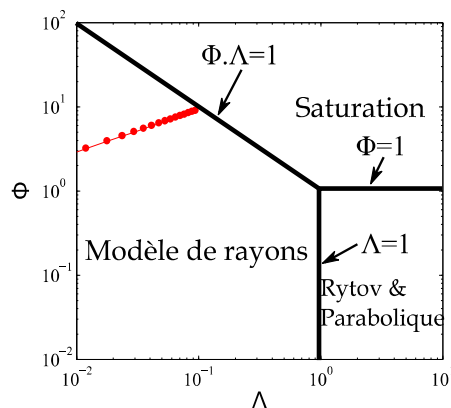


Figure 1-6: Diagramme (Λ, Φ) : zone de validité de Rytov délimitée par les droites $\Lambda=1$ et $\Phi=1$; zone de validité du modèle de rayons délimitée par les droites $\Lambda=1$ et $\Lambda\Phi=1$; les points rouges représentent notre cas d'étude (sodium liquide à 200°C, variation maximale de vitesse est de 1% autour de la valeur moyenne = 2472m/s) avec les distances de propagation allant de 0,1m à 5m.

Le diagramme $\Lambda - \Phi$ nous permet de choisir la méthode la plus adaptée à notre cas d'étude. Par exemple, une onde incidente plane de fréquence 2 MHz se propage en sodium liquide dont la vitesse du son moyenne est de 2472 m/s avec une fluctuation de $\pm 1\%$ et la longueur caractéristique est de 0,1m ; et ses paramètres Λ (1.27) et Φ (1.28) sont calculés et représentés sur le diagramme (Λ, Φ) (Figure 1-6) par les points rouges pour des points d'observation situés de 0 à 5m de la source. Notre cas d'étude est donc bien dans la zone de validité de la méthode de rayons qui sera donc la technique déterministe choisie pour résoudre notre problème. En outre, c'est une méthode permettant de facilement visualiser la propagation au cours du temps de faisceaux à l'aide de sa notion de rayons. Nous allons détailler le principe de cette méthode dans la partie suivante §1.2. Nous allons ensuite calculer le champ de propagation pour une cartographie de température connue ; des exemples seront donnés pour des champs thermiques de gradients constant et turbulent. Les variations des temps de vol et des amplitudes par rapport à ceux lors de la propagation en milieu homogène seront étudiées.

1.2 MÉTHODE DE RAYONS EN MILIEU INHOMOGÈNE

1.2.1 Principe de la théorie asymptotique des rayons

Le principe de la théorie asymptotique des rayons est de chercher une solution sous une forme particulière, appelé *ansatz*, de l'équation d'onde en milieu inhomogène. Il est bien connu qu'une onde se propage sans dispersion en milieu homogène et la solution simple de ce problème peut être représentée par une onde plane monochromatique. Dans un milieu inhomogène, si la longueur d'onde est petite devant les échelles d'inhomogénéité et si les variations d'inhomogénéité sont continues et faibles sur une longueur d'onde, nous pouvons supposer qu'une onde haute fréquence se propage dans tel milieu sans dispersion et que cette onde se comporte localement comme une onde plane. La solution cherchée prend alors la forme d'un développement asymptotique des rayons selon Cerveny [12] et Chapman [13] (sous la forme d'une série d'indice $m = 0$ à $+\infty$) qui s'écrit, dans le domaine fréquentiel, sous la forme d'une série asymptotique en puissances de $1/\omega$:

$$p(\omega, \mathbf{x}) = f(\omega) \sum_{n=1}^{N^*} e^{-i\omega T(\mathbf{x}, \ell_n)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(-i\omega)^m} P^{(m)}(\mathbf{x}, \ell_n), \quad (1.29)$$

où $P^{(m)}$ est le coefficient d'amplitude, $f(\omega)$ est le spectre du signal d'excitation de la source, $i = \sqrt{-1}$, et $T(\mathbf{x}, \ell_n)$ est le temps de vol au point \mathbf{x} traversé par le trajet acoustique ℓ_n , sachant que dans un milieu inhomogène, plusieurs trajets (N^*) peuvent exister entre la source \mathbf{x}_0 et le point d'observation \mathbf{x} (voir la Figure 1-7).

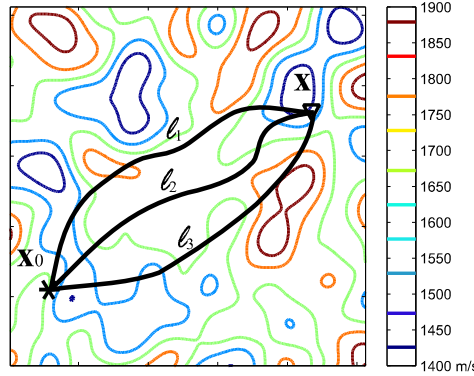


Figure 1-7 : Exemple de trois trajets acoustiques entre la source \mathbf{x}_0 et le point de réception \mathbf{x} ; les contours de la cartographie de vitesse (variant de 1400 m/s à 1900 m/s) sont représentés par les courbes colorées.

La solution (1.29) peut ensuite être écrite dans le domaine temporel en faisant usage de la transformée de Fourier inverse au temps t et à une position \mathbf{x} :

$$p(\mathbf{x}, t) = F(t) * \sum_{n=1}^{N^*} \sum_{m=0}^{\infty} P^{(m)}(\mathbf{x}, \ell_n) \delta^{(m)}(t - T(\mathbf{x}, \ell_n)), \quad (1.30)$$

où les temps de vol $T(\mathbf{x}, \ell_n)$ et les amplitudes $P^{(m)}(\mathbf{x}, \ell_n)$ sont les fonctions réelles à déterminer à partir de l'équation d'onde (1.3) dans un milieu inhomogène de célérité $c(\mathbf{x})$. La fonction $F(t)$ est le signal analytique d'excitation de la source et $\delta^{(m)}(t)$ est le m -ième primitive de la fonction de Dirac $\delta(t)$, c'est-à-dire : $\delta^{(0)}(t) = \delta(t)$ est la fonction de Dirac, $\delta^{(1)} = H(t)$ est la fonction Heaviside et $\delta^{(m+1)}(t) = t^m H(t) / m!$ pour $m > 1$. La surface $T(\mathbf{x}) = \text{const.}$ représente un front d'onde. Le gradient de $T(\mathbf{x})$ nous donne un vecteur perpendiculaire au front d'onde $\mathbf{s}(p_1, p_2, p_3)$, appelé le vecteur lenteur, défini par

$$s_i(\mathbf{x}) = \nabla T(\mathbf{x}) = \frac{\partial T(\mathbf{x})}{\partial x_i} = \frac{n_i^T(\mathbf{x})}{c(\mathbf{x})} \quad \text{avec } i = 1, 2, 3, \quad (1.31)$$

où $\mathbf{n}^T(n_1^T, n_2^T, n_3^T)$ est le vecteur unitaire perpendiculaire au front d'onde (voir la Figure 1-10). Le module du vecteur de lenteur est l'inverse de la vitesse $|\mathbf{s}(\mathbf{x})| = 1/c(\mathbf{x})$.

Une série asymptotique est souvent divergente et il n'y a donc souvent pas d'intérêt à cumuler un nombre infini de termes (seuls les premiers sont souvent pris en compte). Dans la plupart des applications pratiques, seul le premier terme de la série de rayons (l'ordre zéro) est utilisé. En tenant compte du premier terme de la série (1.30) (théorie des rayons à l'ordre zéro), la solution correspondante pour un seul trajet acoustique est alors :

$$p(\mathbf{x}, t) \approx P^{(0)}(\mathbf{x}) F(t - T(\mathbf{x})). \quad (1.32)$$

Cette approximation est connue sous le nom de "méthode des rayons". Si la source est une onde plane monochromatique $F(t) = \exp(-i\omega t)$, pour une fréquence donnée, nous avons l'expression en régime harmonique de la solution (en omettant l'indice zéro) :

$$p(\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{x}) \exp[-i\omega(t - T(\mathbf{x}))], \quad (1.33)$$

où l'amplitude de l'onde $P(\mathbf{x})$ et le temps de vol $T(\mathbf{x})$ sont indépendants de la fréquence. Afin de déterminer ces deux grandeurs, nous allons reporter la solution (1.33) dans l'équation d'onde (1.3). Nous calculons d'abord :

$$\begin{aligned}\nabla^2 p &= \nabla \cdot \nabla p \\ &= \{i\omega(\nabla P + i\omega P \nabla T) \cdot \nabla T \\ &\quad + (\nabla^2 P + i\omega \nabla T \cdot \nabla P + i\omega P \nabla^2 T)\} \exp[-i\omega(t - T(\mathbf{x}))].\end{aligned}\quad (1.34)$$

Dans le domaine fréquentiel, en rassemblant les termes de même puissance de ω , l'équation d'onde (1.3) devient :

$$(i\omega)^2 P [(\nabla T)^2 - c^{-2}] + (i\omega)^1 [2\nabla P \cdot \nabla T + P \nabla^2 T] + (i\omega)^0 \nabla^2 P = 0. \quad (1.35)$$

Cette équation doit être satisfaite quelle que soit la fréquence ; par conséquent les termes en ω^2 , ω^1 , ω^0 doivent être égaux à zéro. Cependant, l'équation (1.35) ne peut pas être parfaitement satisfaite, car nous avons trois équations à deux inconnues P et T . Cependant, en haute fréquence, le premier terme (en ω^2) et le second terme (en ω^1) sont prédominants par rapport au troisième terme (en ω^0) ; donc la solution en haute-fréquence de (1.35) est obtenue en annulant les deux premiers termes. Nous obtenons avec le terme en ω^2 l'équation eikonale :

$$(\nabla T)^2 = c^{-2} = c_0^{-2} [1 + \varepsilon], \quad (1.36)$$

qui est une équation fondamentale dans la théorie de rayons et qui régit le trajet acoustique dans le milieu de propagation. Si l'équation (1.33) prend la forme suivante :

$$p(\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{x}) \exp[-i(\omega t - k_0 S(\mathbf{x}))], \quad (1.37)$$

où $k_0 = \omega/c_0$ est le nombre d'onde en milieu homogène moyen, $S(\mathbf{x})$ la phase. Une forme alternative de l'équation (1.36) est donnée par :

$$(\nabla S(\mathbf{x}))^2 = n^2, \quad (1.38)$$

où $n = c_0/c(\mathbf{x})$ est l'indice de réfraction du milieu et le gradient de la fonction de phase $S(\mathbf{x})$ est défini par

$$\nabla S(\mathbf{x}) = n \frac{d\mathbf{x}}{ds} = n \mathbf{n}^T, \quad (1.39)$$

où s est l'abscisse curviligne du rayon et où $d\mathbf{x}/ds = \mathbf{n}^T$ est la tangente au rayon (voir la Figure 1-10). La phase S est proportionnelle au chemin acoustique le long des rayons.

A partir du second terme en ω^1 de l'équation (1.35), nous pouvons extraire l'équation suivante, appelée "équation de transport" :

$$2\nabla P \cdot \nabla T + P \nabla^2 T = 0, \quad (1.40)$$

qui permet de déterminer l'amplitude de pression P de l'onde. Ces deux équations (1.35) et (1.39) jouent des rôles essentiels dans la méthode des rayons. Après la résolution des équations eikonale et de transport pour T et P , nous obtenons la solution de rayons d'ordre zéro.

1.2.2 Théorie de rayons cinématiques : résolution de l'équation eikonale

La théorie de rayons cinématiques consiste à résoudre l'équation eikonale (1.35) afin de décrire les trajets et les temps de vol des rayons. Un modèle mathématique basé sur la méthode des caractéristiques consiste à écrire l'équation eikonale sous forme de l'équation

de Hamilton-Jacobi et ensuite à la résoudre par un système d'équations différentielles ordinaires, appelé le système du tracé de rayons. Ce modèle calcule directement les trajets des rayons pour des conditions initiales données, et les temps de vol peuvent alors être calculés le long de ces rayons. Il convient de noter que, du fait que les rayons ne couvrent pas forcément entièrement l'espace à étudier à cause de la divergence des rayons et de la variation de vitesse $c(\mathbf{r})$, des zones d'ombre où il n'y a pas de distribution des rayons peuvent artificiellement être créées, dans lesquelles le champ est nul, sans que cela soit nécessairement physique.

Des méthodes numériques, basées sur le schéma du type *différences finies* ont été proposées par nombreux auteurs : Podvin [24], Vidale [19] et Van Trier [25], afin d'éviter cet inconvénient du tracé de rayons. Ces méthodes résolvent numériquement l'équation eikonale par la discrétisation par différences finies des opérateurs de dérivation/différentiation, souvent appelées les solveurs d'eikonale. Des améliorations sur l'efficacité des différences finies ont également proposées ensuite comme *fast marching method* [26], *group marching method* [27] ou encore *fast sweeping method* [28]. Les méthodes numériques posent des problèmes de stabilité et de précision dans les zones où la variation de vitesse est très forte, mais le problème majeur de ces schémas numériques est qu'ils n'acceptent qu'une seule valeur de temps en un point donné qui est le temps de première arrivée. Par conséquent, ces méthodes sont invalides dans les endroits où plusieurs fronts d'onde se confondent ou lorsque le front d'onde se déforme et s'enroule, par exemple dans les cas suivants : mélange des ondes incidente et réfléchiée, ondes issues de sources différentes et caustiques. Dans la Figure 1-8, nous montrons les solutions exactes des fronts d'onde issus de deux sources ponctuelles dans un milieu homogène, ainsi que les solutions données par la méthode des différences finies et les tracés de rayons calculés par la méthode de rayons. La solution exacte (Figure 1-8-a) montre qu'il existe une zone couverte par les deux ondes : on a donc deux temps de vol différents pour un point donné. Mais la solution des différences finies (Figure 1-8-b) ne donne qu'une seule solution pour un point qui correspond au temps de première arrivée. Les tracés de rayons permettent en revanche de calculer avec rigueur les temps de vol associés à tous les rayons.

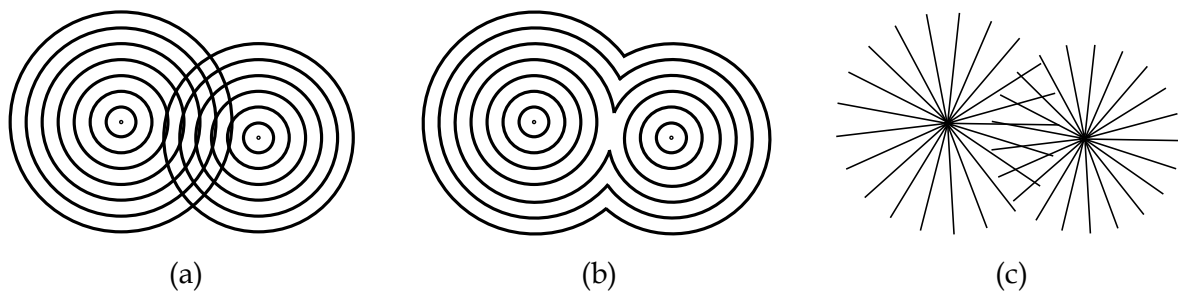


Figure 1-8: Deux sources ponctuelles émettent deux ondes sphériques décalées temporellement entre elles dans un milieu homogène. (a) Solutions exactes de l'équation eikonale (fronts d'onde) ; (b) Solutions de l'équation eikonale à l'aide des solveurs d'eikonale du type différences finies; (c) : Tracés de rayons calculés par la méthode de rayons.

La méthode de front d'onde (*wavefront construction method*), proposée par Vinje *et al.* [29], consiste à construire, à partir des tracés des rayons, les fronts d'onde les plus précis possibles, et quasi uniformes dans tout l'espace. Sachant que les fronts d'onde sont des courbes orthogonales aux rayons, plus on a des rayons, plus la précision des fronts d'onde augmentera. Des nouveaux rayons seront donc tracés au fur et à mesure à partir d'un front d'onde précédent. L'introduction d'un nouveau rayon sera réalisée automatiquement dès que certains critères imposés ne sont plus respectés, par exemple, la distance entre deux rayons voisins ou la différence de direction de propagation entre deux rayons voisins. Un exemple de cette méthode est illustré en Figure 1-9.

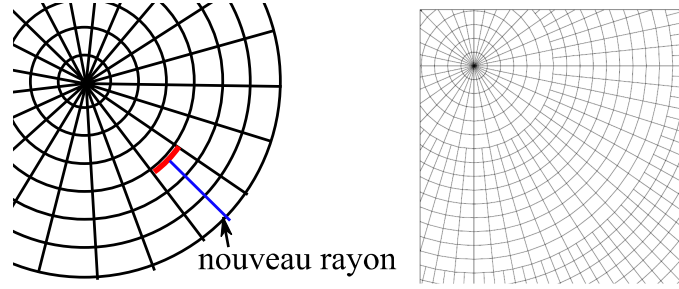


Figure 1-9 : Une démonstration de la méthode de front d'onde qui est fondée sur la méthode de rayons ; un nouveau rayon (courbe bleue) peut être créé à partir d'un front d'onde existant lorsque la longueur du segment du front d'onde entre deux rayons (segment rouge) est supérieure à une certaine distance critique.

1.2.2.1 Système du tracé de rayons acoustiques

Nous présentons ici la résolution de l'équation eikonale par le biais de tracé de rayons. L'équation eikonale peut être résolue par l'application de la méthode des caractéristiques [30] qui est une méthode permettant de résoudre des équations différentielles partielles (EDPs), linéaires ou non, d'ordre 1. Dans le cadre de cette méthode, nous cherchons des courbes (appelées courbes caractéristiques), le long desquelles l'EDP à résoudre se réduit à une équation différentielle ordinaire (EDO). La résolution de l'équation eikonale par la méthode des caractéristiques est détaillée en Annexe A.1. A l'aide de cette méthode, l'équation eikonale (EDP) est remplacée par un système d'EDO couplées pour lesquelles la résolution est souvent plus simple. Ce système d'EDO est appelé le système de tracé de rayons :

$$\frac{dx_i}{dT} = c^2 s_i, \quad (1.41.a)$$

$$\frac{ds_i}{dT} = -\frac{1}{c} c_{,i}, \quad (1.41.b)$$

où x_i est la coordonnée d'un point sur le rayon (voir la Figure 1-10), s_i est la lenteur en x_i , c la vitesse du son en x_i et T est le temps de vol.

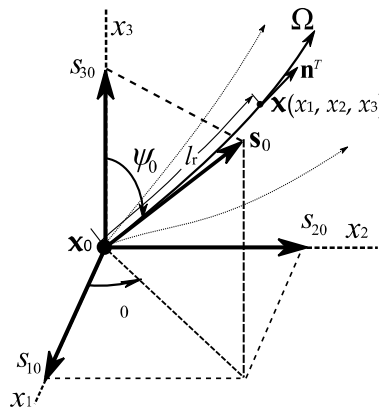


Figure 1-10: Conditions initiales (s_0 , x_0) d'un tracé de rayon issu d'une source ponctuelle : la direction initiale du rayon déterminée par deux angles de rayonnement, la déclinaison ψ_0 et l'azimuth φ_0 ; \mathbf{x} est un point courant sur le rayon, \mathbf{n}^T est la tangente du point \mathbf{x} et l_r est la curviligne du rayon associée au point \mathbf{x} .

Pour calculer le système du tracé de rayons (1.41.a) et (b), dans un premier temps, les conditions initiales doivent être spécifiées. Par conséquent, nous devons fixer la position du point source $x_{i0} = x_i(T_0)$ et le vecteur de lenteur initial $s_{i0} = s_i(T_0)$. Ce dernier peut être

déterminé par la direction initiale d'un rayon spécifiée par deux angles de rayonnement, la déclinaison ψ_0 et l'azimuth ϑ_0 :

$$\begin{aligned} s_{10} &= c^{-1}(x_{i0}) \sin \psi_0 \cos \vartheta_0, \\ s_{20} &= c^{-1}(x_{i0}) \sin \psi_0 \sin \vartheta_0, \\ s_{30} &= c^{-1}(x_{i0}) \cos \vartheta_0. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Dans certains cas particuliers, on peut retrouver des solutions analytiques au système des équations 1.41.a et b. Par exemple dans un milieu homogène, décrit par la vitesse constante c_0 , le vecteur de lenteur conserve sa valeur initiale et l'équation (1.41.a) devient

$$x_i = x_{i0} + c_0^2 s_{i0} (T - T_0), \quad (1.43)$$

qui est l'équation paramétrique d'un segment de droite. Les rayons en milieu homogène sont donc des segments de droite démarrant au point source et dont la direction est définie par la condition initiale sur p_i . Les écartements entre deux fronts d'onde sont également constants. Un exemple de tracé de rayons issus d'une source sphérique dans un milieu homogène est représenté en Figure 1-11 pour trois instants successifs.

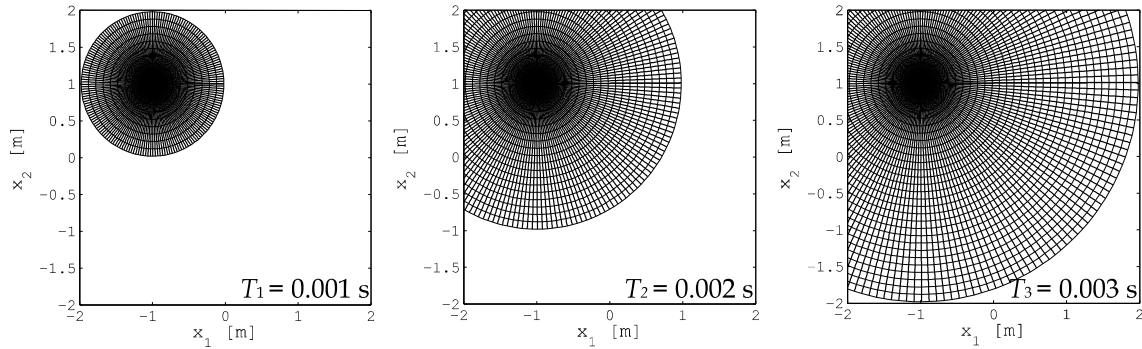


Figure 1-11: Tracés de rayons issus d'une source ponctuelle ($x_{10} = -1$, $x_{20} = 1$) émettant à $T=0$ dans un milieu homogène ($c_0 = 950$ m/s) à trois instants différents (T_1 , T_2 , T_3) : les rayons sont rectilignes et l'écartement entre deux fronts d'onde successifs est spatialement uniforme.

Dans un milieu de gradient de vitesse constant, nous pouvons montrer par le tracé de rayons que les rayons sont des arcs de cercle. Par exemple, considérons un milieu avec un gradient de vitesse constant a_2 dans la direction x_2 et pour lequel la vitesse du son ne dépend que de x_2 : $c(x_2) = c_0 + a_2(x_2 - x_{20})$, où c_0 est la vitesse à l'endroit de la source. On a alors $\partial c / \partial x_2 = a_2$ et $\partial c / \partial x_1 = 0$, $\partial c / \partial x_3 = 0$ dans le système d'EDO (A.1.12). Les rayons dans le plan (x_1, x_2) peuvent donc être calculés par

$$\left(x_1 - x_{10} - \frac{s_{20}c_0}{a_2}s_{10}\right)^2 + \left(x_2 - x_{20} - \frac{c_0}{a_2}\right)^2 = \left[\frac{1}{a_2 s_{10}}\right]^2, \quad (1.44)$$

qui est une équation de cercle de centre $(x_{10} + \frac{s_{20}c_0}{a_2}s_{10}, x_{20} + \frac{c_0}{a_2})$ et de rayon $1/a_2 s_{10}$.

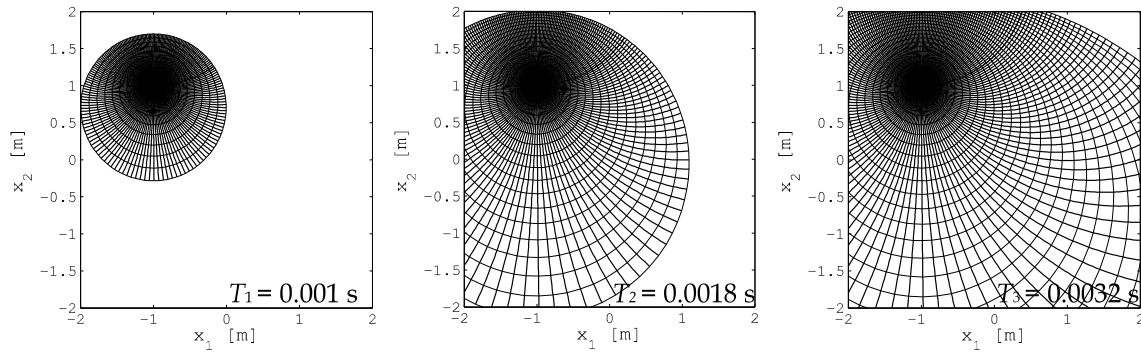


Figure 1-12 : Tracés de rayons issus d'une source ponctuelle ($x_{10} = -1$, $x_{20} = 1$) dans un champ de vitesse de gradient constant : $c(x_2) = c_0 + a_2(x_2 - x_{20})$, $c_0 = 950$ m/s, $a_2 = -650$ s⁻¹, à trois instants différents (T_1 , T_2 , T_3) : les rayons sont des arcs de cercle, ainsi que les fronts d'onde.

Un exemple de tracés de rayons dans un champ de vitesse de gradient constant est donnée en Figure 1-12. Les tracés de rayons sont issus d'une source ponctuelle ; le gradient de vitesse a_2 est orienté dans la direction x_2 . Nous pouvons constater que l'écartement entre deux fronts d'onde successifs est proportionnel à la vitesse du son associée au point considéré. L'écartement entre deux fronts d'onde successifs augmente avec la croissance de vitesse selon la direction x_2 .

Pour des milieux inhomogènes quelconques, nous n'avons pas de solution analytique disponible. Pour calculer les tracés de rayons et les temps de vol associé dans ces milieux, nous devons résoudre le système d'EDOs (1.41.a) et (b) par des schémas numériques standards adaptés, par exemple : le schéma Runge-Kutta [31] d'ordre deux ou quatre. Le choix de la taille du pas « dT » dépend notamment de la régularité de la distribution de vitesse : il est effectué afin d'obtenir un compromis entre la précision du résultat et l'efficacité du calcul. Pour cela, une étude de la convergence du schéma peut être mise en œuvre.

Lorsque les applications sont réelles, il est difficile d'avoir une cartographie de vitesse décrite par des expressions analytiques : les valeurs sont le plus souvent discrètes pour un maillage spatial constituant une grille irrégulière. L'interpolation entre les valeurs données peut cependant être réalisée par l'interpolation par des fonctions Spline [32] pour disposer d'une vitesse et de ses dérivées du premier et second ordre spatiales continues dans tout l'espace (les dérivés partielles secondes de vitesse servant au calcul d'amplitude).

1.2.2.2 Tracé de rayons entre deux points

Le tracé de rayons classique présenté précédemment peut être utilisé pour calculer le champ de propagation en un point de calcul de champ et par extension dans une zone de calcul 2D ou 3D. Les conditions initiales doivent être fixées de sorte que les rayons calculés puissent couvrir cette zone. Cependant, lorsque l'on connaît uniquement le point source et le point d'observation, l'application du tracé de rayons entre deux points (*ray bending* en terminologie anglo-saxonne) est plus pertinente. Au lieu de fixer les conditions initiales, cette méthode consiste à fixer le point de source et le point de réception.

L'idée de base concernant la solution du tracé de rayon entre deux points fixes consiste à déterminer une courbe reliant les deux points, le long de laquelle l'équation eikonale (1.36) est satisfaite. Les EDOs montrées en annexe aux sections A.1.5 et A.1.6 peuvent se combiner pour devenir l'équation différentielle ordinaire du second ordre suivante

$$\frac{d}{d\mu} \left(c^{\eta-2} \frac{dx_i}{d\mu} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{c^\eta} \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.45)$$

où les conditions limites seront la position du point source \mathbf{x}_0 et la position du point de calcul du champ \mathbf{x}_1 . Les équations peuvent être discrétisées puis résolues par des schémas numériques par exemple par la méthode de différences finies proposée par Pereyra *et al.* [33].

D'autres stratégies de tracé de rayons entre deux points existent également. Ainsi, selon le principe de Fermat, l'onde se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours soit extrémale (principe de moindre action). Une méthode rapide, proposée par Um et Thurber [34], se démarque des autres méthodes classiques existantes qui déterminent les trajectoires par la résolution du système de tracé de rayons : en s'appuyant sur le principe de moindre action, cette méthode minimise directement le temps de vol entre deux points. L'idée est de proposer dans un premier temps un trajet quelconque Ω_0 qui relie les deux points, appelé le trajet de référence. La procédure de minimisation de temps de vol effectuée par la suite consiste à trouver un trajet Ω_n qui possède un temps de vol minimal parmi tous les trajets voisins du trajet de référence. Cette procédure se poursuit itérativement afin de trouver le meilleur trajet correspondant au temps de vol minimal (voir la Figure 1-13).

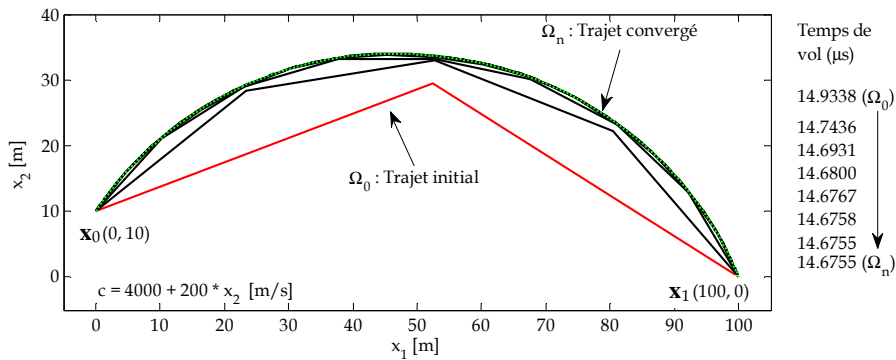


Figure 1-13: Exemple de la méthode de tracé de rayons entre deux points $(\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{x}_1)$, dans un champ de vitesse de gradient constant : $c(x_2) = 4000 + 200x_2$ (m/s) : premier trajet Ω_0 (rouge) proposé, nouveaux trajets (noirs) calculés successivement et trajet optimisé (en vert). Les temps de vol de chaque trajet sont montrés à droite.

Nous avons présenté dans cette section différentes techniques pour calculer les tracés de rayons par résolution de l'équation eikonale. Dans notre cas d'étude, les solutions analytiques sont appliquées pour déterminer les rayons dans un milieu homogène (1.43) ou de gradient constant (1.44) ; et le système de tracé de rayons (1.41.a) et (b) est utilisé au §1.3.2 pour calculer les tracés de rayons du champ de propagation d'onde dans un milieu inhomogène aléatoire. La méthode du tracé de rayons entre deux points (1.45) proposée par Um et Thurber [34] sera appliquée pour calculer le faisceau acoustique généré par un transducteur afin de relier le point d'observation et les points sur la surface de transducteur.

1.2.3 Théorie de rayons dynamiques: résolution de l'équation de transport

Différentes méthodes de résolution de l'équation eikonale ont été présentées dans la partie précédente, qui permettent la construction des rayons et fronts d'onde. Les résultats de ces méthodes décrivent la géométrie des rayons acoustiques et les temps de vol associés à chacun des rayons, le flux d'énergie d'onde se propageant le long de ces rayons. Dans cette partie, on s'intéresse à la recherche de la description de la variation d'amplitude le long d'un rayon via la résolution de l'équation de transport (1.40) dans l'approximation de haute-fréquence.

1.2.3.1 Résolution de l'équation de transport : conservation de l'énergie

En multipliant par l'amplitude de pression P , l'équation de transport (1.40) devient

$$2\nabla P \cdot P \cdot \nabla T + P^2 \nabla^2 T = \nabla(P^2 \nabla T) = 0. \quad (1.46)$$

$P^2 \nabla T$ est donc à gradient nul ; son flux se conserve donc dans un volume V fermé par une surface W et ce volume est associé à un rayon principal dont l'orientation est définie par le vecteur $\mathbf{s} = \nabla T$ qui est le vecteur lenteur [défini par (1.31)]. C'est pourquoi nous allons introduire le concept du « tube de rayons » qui est composé de parois parallèles Γ au rayon principal et de deux sections S_1 et S_2 qui sont les fronts d'onde à deux instants proches (voir la Figure 1-14) et perpendiculaires au vecteur \mathbf{s} . On a donc $W = \Gamma + S_1 + S_2$. Notons \hat{n} le vecteur normal extérieur à W . On a donc :

$$0 = \int_V \nabla(P^2 \nabla T) dV = \int_{\Gamma+S_1+S_2} P^2 \mathbf{s} \cdot \hat{n} dW = - \int_{S_1} \frac{P^2}{c} dW + \int_{S_2} \frac{P^2}{c} dW. \quad (1.47)$$

L'intégrale sur la surface Γ est nulle puisque le vecteur lenteur \mathbf{s} étant tangent aux rayons, il est donc orthogonal au vecteur \hat{n} de la surface Γ (le flux de l'énergie traverse en effet) uniquement les sections de tube S_1 et S_2). La conservation d'énergie peut donc s'exprimer de la façon suivante :

$$\int_{S_1} \frac{P^2}{c} dW = \int_{S_2} \frac{P^2}{c} dW. \quad (1.48)$$

En supposant que les grandeurs sont uniformes sur une section, nous pouvons donc calculer l'amplitude P_2 associée à un rayon en un point de la section S_2 , à partir de sa valeur connue P_1 en un point de S_1 et la déformation du tube de rayons associé, représentée par le rapport des sections S_1/S_2 .

$$P_2 = P_1 \sqrt{\frac{c_2 S_1}{c_1 S_2}}. \quad (1.49)$$

On appelle ce rapport des sections du tube de rayons la *divergence géométrique* du champ de propagation.

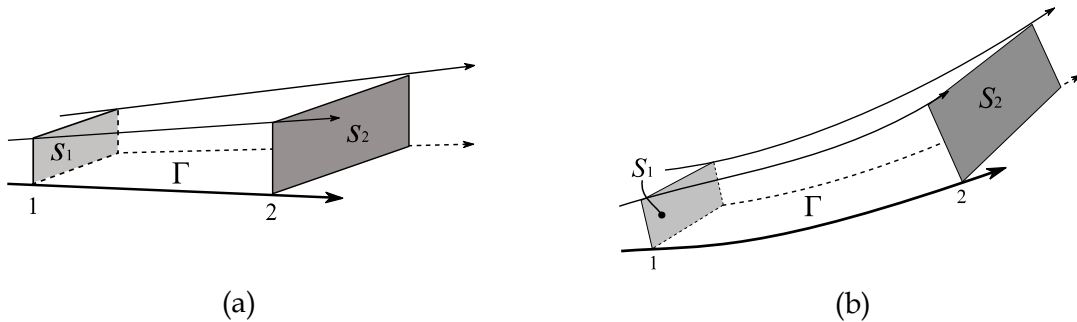


Figure 1-14 : Tube de rayons: (a) – dans un milieu homogène, les rayons sont rectilignes ; (b)- dans un milieu inhomogène, les rayons ne sont plus rectilignes.

Dans un seul milieu homogène, le tube de rayons est composé de rayons droits (Figure 1-14-a), la forme du tube ressemble à un *pinceau* et le rapport des sections S_1/S_2 pourra être calculé à l'aide du vecteur de lenteur initial et de la distance de propagation. Dans une pièce hétérogène (c'est-à-dire composée de plusieurs milieux homogènes différents), des matrices d'évolution de pinceaux ont été développées par N. Gengembre [35] : elles décrivent la déformation des pinceaux au passage d'une interface.

Dans un milieu inhomogène (Figure 1-14-b), la situation devient plus complexe puisque les rayons ne sont plus rectilignes ; la méthode de pinceaux telle que développée n'est plus valable. Afin de décrire la divergence géométrique d'un tube de rayon dans le cas général, nous allons introduire le Jacobien J de rayons qui est le Jacobien de la transformation du système de coordonnées cartésiennes $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ au système de coordonnées associé au rayon (Annexe A.2). La définition et le calcul du Jacobien J de rayons sont détaillés dans cette

annexe. Il y est montré que l'équation de transport peut également être résolue en termes de Jacobien de rayons J_1 aux points de la section S_1 et J_2 de la section S_2 à l'aide du théorème de Liouville ; nous obtenons donc :

$$P_2 = P_1 \sqrt{\frac{c_2 J_1}{c_1 J_2}}. \quad (1.50)$$

Ce dernier résultat nous montre que le rapport des sections de tube de rayons et celui des Jacobien de rayons sont égaux :

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{J_1}{J_2}. \quad (1.51)$$

Le Jacobien de rayons J est donc révélateur de la divergence géométrique du champ de propagation.

Comme indiqué au §1.2.2.1, il est difficile d'avoir une cartographie de vitesse décrite par des expressions analytiques pour certaines applications réelles : les valeurs sont le plus souvent discrètes pour un maillage spatial constituant une grille irrégulière. L'interpolation entre les valeurs données peut cependant être réalisée par l'interpolation par des fonctions Spline [32] pour disposer d'une vitesse et de ses dérivées du premier et second ordre spatiales continues dans tout l'espace servant au calcul d'amplitude (le calcul d'amplitude est détaillé en annexe A2).

1.2.3.2 Problèmes de caustique

Si le point d'observation est sur une caustique, la méthode de rayons n'est plus valable car la section du tube de rayon devient nulle et le Jacobien de rayons ne peut pas être défini sur une caustique. La théorie de rayons prédit alors une amplitude infinie. Dans ce cas des méthodes mathématiques spécifiques sont nécessaires, par exemple la méthode asymptotique uniforme proposée par Stamnes [36].

S'il y a des caustiques le long d'un trajet acoustique, nous devons nous intéresser au changement de phase induit après passage par les caustiques. Nous distinguons deux types de caustiques dans un espace 3D : la caustique du premier ordre (Figure 1-15-a) correspond à un aplatissement du tube de rayon qui devient un segment de ligne droite et la caustique du deuxième ordre (Figure 1-15-b) est associée à une réduction du tube de rayon à un point.

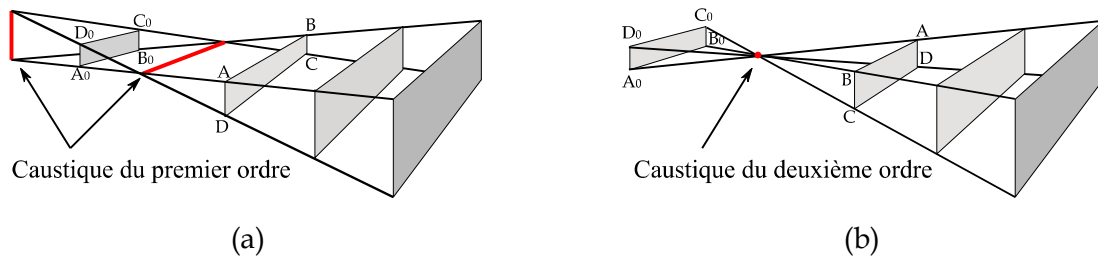


Figure 1-15: Tube de rayons après passage par une caustique, la section du tube de rayons avant la caustique définie par $(A_0B_0C_0D_0)$: (a)- Caustique du premier ordre, la section du tube devient $(DCBA)$; (b)- Caustique du deuxième ordre, la section du tube devient $(CDAB)$.

Dans un milieu isotrope, après passage par une caustique du premier ordre, le Jacobien du rayon J change de signe. Dans ce cas, un facteur $\sqrt{-1}$ est introduit dans le calcul d'amplitude, ce qui correspond à un changement de phase de $\pi/2$. Une caustique du deuxième ordre peut être considérée comme deux caustiques du premier ordre : nous avons donc un changement de phase de $\pi = 2 \times \pi/2$. Plus généralement, après passage par une caustique, un changement de phase de $\Delta\varphi_c = \pi/2$ peut être introduit dans le calcul

d'amplitude, où $\Delta\varphi_c$ est égal à l'ordre de la caustique. Pour un trajet acoustique allant du point source d'abscisse curviligne l_{r0} au point de réception l_r le changement de phase est contrôlé par un indice $\varphi_c(l_{r0}, l_r)$ qui augmente par le cumul de différents $\Delta\varphi_c$ à chaque passage d'une caustique. Le calcul d'amplitude devient :

$$P(s) = \sqrt{\frac{c(s)|J(s_0)|}{c(s_0)|J(s)|}} P(s_0) \exp\left[i \frac{1}{2} \pi \varphi_c(l_{r0}, l_r)\right], \quad (1.52)$$

1.2.3.3 Applications numériques : calcul d'amplitude en milieu inhomogène

On calcule d'abord les Jacobiens de rayons le long des tracés de rayons par la méthode de tracé de rayons dynamique (développé en Annexe A2) ; ensuite en appliquant l'équation (1.52), on peut calculer l'amplitude du champ associée aux tracés de rayons. Des modèles de calcul d'amplitude 2D et 3D ont été développés. Nous allons appliquer le modèle 2D pour calculer l'amplitude du champ de propagation d'une onde sphérique dans le champ de vitesse déjà étudié précédemment de gradient constant :

$$c(x_2) = c_0 + a_2(x_2 - x_{20}), \quad (1.53)$$

avec $c_0 = 950$ m/s, $a_2 = -650$ s⁻¹ et $x_{20} = 1$ m. Les tracés de rayons de ce champ ont été calculés par l'équation (1.44) et illustrés en Figure 1-12.

Avec l'équation (1.52), les amplitudes sont calculées le long des rayons. Les valeurs sont représentées par un code de couleur et normalisées par rapport à celle de la source (Figure 1-16-b). Les tracés de rayons associés sont également illustrés en Figure 1-16-a (équivalents à ceux en Figure 1-12) et aident à l'interprétation de l'évolution de l'amplitude en milieu inhomogène. Remarquons que l'amplitude décroît plus vite selon la direction des x_2 décroissantes, car comme nous allons l'expliquer ci-après, selon cette direction les rayons sont plus divergents que dans la direction opposée. En effet, nous pouvons assimiler la longueur du segment d'un front d'onde entre deux rayons voisins comme la section d'un tube de rayons 3D qui est lié à la divergence géométrique du champ de propagation. La taille du segment est donc proportionnelle au Jacobien de rayons, ce qui peut, avec l'équation (1.52), expliquer la vitesse de la décroissance de l'amplitude : la longueur de ce segment augmente en effet avec les x_2 décroissantes.

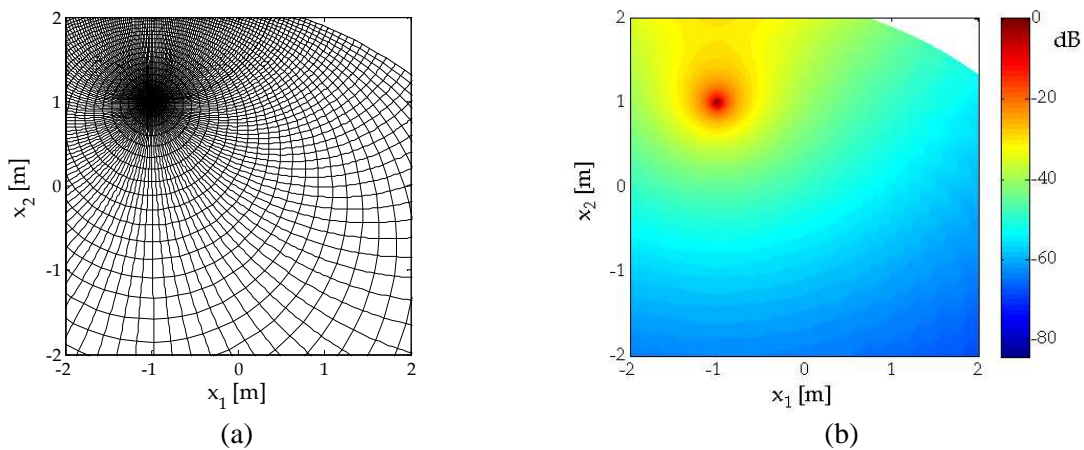


Figure 1-16: Calcul d'amplitude d'une onde sphérique générée à partir d'une source ponctuelle en \mathbf{x}_0 ($x_{10} = -1$ m, $x_{20} = 1$ m) : (a) – tracés de rayons et fronts d'onde correspondants ; (b) – amplitudes associées aux rayons, représentées par le code de couleur en dB, normalisées par rapport à l'amplitude de la source.

1.3 METHODE DE RAYONS EN MILIEU ALEATOIRE

Nous avons décrit, dans la section §1.1.1, la condition réelle du milieu de propagation. Afin de générer des champs spatiaux de température et ensuite de célérité représentatifs de la situation rencontrée dans un réacteur à sodium liquide, nous avons fait le choix de décomposer ce milieu de propagation en deux parties : une partie inhomogène stationnaire (par exemple un gradient de vitesse) et une partie turbulente aléatoire. Les travaux de Buffet [37] et Fiorina [23] montrent qu'il est tout à fait possible de modéliser ce milieu turbulent par un modèle de champ aléatoire gaussien permettant de générer une cartographie de vitesse dans le milieu de propagation. Nous avons calculé précédemment les tracés de rayons et les amplitudes d'un champ de propagation dans un milieu stationnaire de gradient de vitesse constant. On s'intéresse dans cette section à la propagation d'onde dans un milieu turbulent aléatoire. Des études paramétriques sont mises en œuvre afin de comprendre les influences des paramètres de la turbulence sur la propagation d'onde.

1.3.1 Modélisation des milieux turbulents homogènes et isotropes

Dans notre cas d'étude, la vitesse de la circulation de sodium (10 m/s) est largement inférieure à la vitesse du son en sodium, nous pouvons considérer que le milieu reste stationnaire au cours de la propagation du son. Et la zone d'inspection est localisée à proximité du cœur du réacteur, la turbulence peut être donc considérée comme localement homogène. Selon les travaux de Fiorina [23], la contribution turbulente du sodium liquide dans le cœur du réacteur peut être modélisée par un champ turbulent gaussien homogène et isotrope (voir définitions en annexe A.3) en raison de sa simplicité et de sa ressemblance structurelle avec le spectre de turbulence mesuré dans le sodium [37]. Le spectre du champ turbulent représente la distribution d'énergie de fluctuations turbulentes dans le domaine fréquentiel. Le calcul du spectre d'un champ aléatoire gaussien est présenté au §2.3 dans le cadre de la simulation stochastique. Pour déterminer la variance de la fluctuation de température σ_τ^2 , nous supposons que la distribution de la fluctuation de température $\tilde{\tau}$ est de moyenne nulle $\langle \tilde{\tau} \rangle = 0$ et suit une loi normale (gaussienne) ; d'après les critères de normalité, 99% de la population se trouve dans l'intervalle $[-3\sigma_\tau; +3\sigma_\tau]$. A partir de la variation maximale de température $\tilde{\tau}_{\max}$, nous pouvons donc estimer l'écart-type de la fluctuation

$$\sigma_\tau \simeq \frac{\tilde{\tau}_{\max}}{6}. \quad (1.54)$$

Par l'utilisation de la méthode de représentation spectrale (détaillée au §2.3.1), nous pouvons générer une cartographie du champ turbulent thermique à partir de la variance σ_τ^2 et de la fonction de corrélation gaussienne.

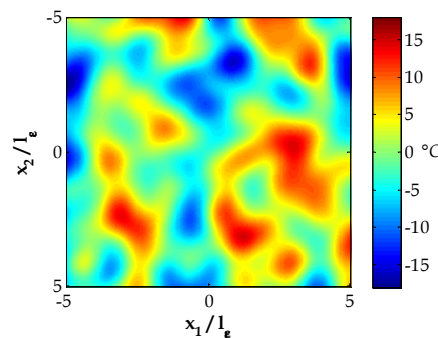


Figure 1-17: Une réalisation de turbulence thermique : la fluctuation thermique est représentée par le code de couleur.

Une réalisation de la cartographie de température est représentée en Figure 1-17 dans un espace 2D ($1,0 \text{ m} \times 1,0 \text{ m}$) en dimensions réduites par rapport à la longueur caractéristique (x_1/l_e et x_2/l_e) dans un milieu de longueur caractéristique $0,1 \text{ m}$ et de variation maximale de température de 50°C .

Nous avons donc fait le choix de modéliser le milieu aléatoire par un milieu turbulent gaussien homogène et isotrope afin d'étudier la propagation d'une onde acoustique dans un tel milieu.

1.3.2 Calcul du champ de propagation en milieu turbulent homogène isotrope

En utilisant la relation (1.1), nous pouvons convertir la cartographie de température, générée dans la partie précédente, en une cartographie de vitesse du son qui est l'entrée du modèle de rayons utilisé pour calculer la propagation d'onde dans un tel milieu. L'application du tracé de rayon cinématique (équations (1.41.a) et (1.40.b)) nous permet de calculer les rayons et les temps de vol, les amplitudes associées étant calculées à partir de l'équation (1.50) du tracé de rayon dynamique.

1.3.2.1 Tracé de rayons en milieu turbulent gaussien

Dans un premier temps, on va calculer, à partir d'une cartographie de vitesse donnée, les tracés de rayons et les temps de vol associés. Nous avons généré deux exemples de cartographies avec des écart-types de fluctuations différents ($\sigma_\epsilon = 0.0018$ et $\sigma_\epsilon = 0.0035$ qui correspondent respectivement à une variation maximale de température en sodium de 50°C et de 100°C), ce qui nous permet d'étudier l'influence de cette valeur sur le champ de propagation. Les autres caractéristiques du milieu sont:

- vitesse du son moyenne : $c_0 = 2472,5 \text{ m/s}$;
- masse volumique : $\rho = 0,927 \text{ kg/m}^3$;
- longueur caractéristique : $l_e = 100 \text{ mm}$.

Une onde plane monochromatique de fréquence 2 MHz (soit une longueur d'onde de $1,2 \text{ mm}$) se propageant dans la direction et le sens $x_2 > 0$ pénètre dans le milieu inhomogène aléatoire situé en $x_2 > 0$. Lors de la résolution du système du tracé de rayons (1.41.a) et (b) avec le schéma Runge-Kutta, le pas de temps a été pris égal à $dT = 1/(c_0 k_{\max})$, comme proposé par Karweit *et al.* [8], où $k_{\max} = 2\pi f/c_{\min}$ est le plus grand nombre d'onde (correspondant à la plus petite célérité du son) du milieu de propagation inhomogène. Les tracés des rayons sont calculés (voir Figure 1-18) dans un espace 2D de coordonnées normalisées par rapport à la longueur caractéristique (x/l_e). Le champ turbulent dévie les rayons créant ainsi des zones de concentration de rayons (caustiques) et des zones d'ombre acoustique. Cette déviation des rayons augmente avec la valeur x_2/l_e (la distance de propagation x_2 normalisée par rapport à la longueur caractéristique l_e du milieu) ; pour une distance x_2 donnée, la déviation des rayons est inversement proportionnelle à la longueur caractéristique, c'est-à-dire que les rayons sont plus déviés quand la longueur caractéristique l_e est petite, car localement la variance de la vitesse du son d'un milieu de petite longueur caractéristique l_e est plus élevée que celle d'un milieu de grande longueur caractéristique (variation de la vitesse est plus rapide quand l_e est petite), et la déviation de rayon est proportionnelle à la variance de la vitesse du son. En comparant des résultats issus de deux cartographies différentes d'écart-type $\sigma_\epsilon = 0.0018$ et $\sigma_\epsilon = 0.0035$, nous pouvons remarquer que la déviation de rayons est plus importante pour la cartographie qui a une fluctuation de vitesse plus forte.

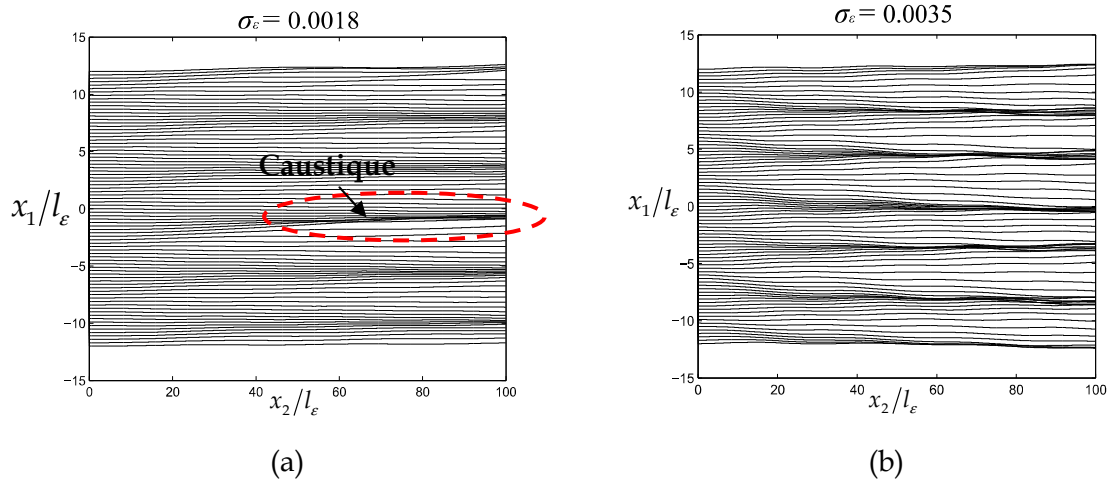


Figure 1-18 : Résultats des tracés de rayons dans deux champs turbulents thermiques avec différents écart-types de ε : (a) $\rightarrow \sigma_\varepsilon = 0,0018$, (b) $\rightarrow \sigma_\varepsilon = 0,0035$. Les lignes noires représentent les rayons issus d'une source linéique émettant des rayons parallèles (onde plane) en $x_2=0$ qui se propage le long de la direction x_2 .

Pour constater les impacts de la variation de vitesse sur les temps de vol, nous mesurons ces temps de vol à des distances de la source différentes (x_2/l_ε). Les fluctuations des temps de vol mesurés sont montrées en Figure 1-19. Les fluctuations sont de l'ordre de $\pm 0,5 \mu\text{s}$ et corrélées de proche en proche puisque les courbes des profils de temps sont continues et relativement lisses. La ressemblance des profils de temps entre deux distances de propagation voisines montre qu'une corrélation spatiale de phase le long de la distance de propagation existe également.

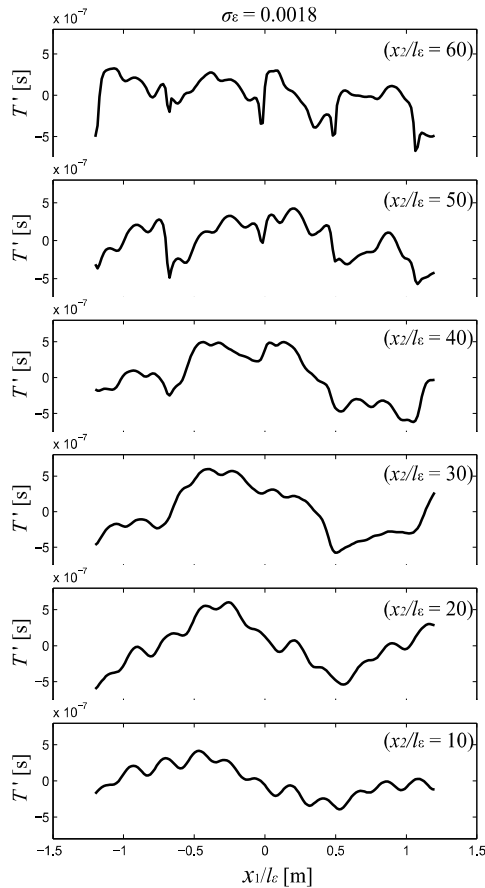


Figure 1-19: Fluctuations des temps de vol des rayons issus d'une onde plane qui se propage le long de la direction x_2 dans un milieu dont longueur caractéristique est de 100mm et l'écart-type de ε est $\sigma_\varepsilon = 0.0018$ qui correspond à une variation maximale de température de 50°C ; elles sont mesurées sur des écrans positionnés aux différentes distances de la source ($x_2=0$) et perpendiculaires à la direction de propagation.

1.3.2.2 Calcul d'amplitude en milieu turbulent gaussien

Au cours du calcul des tracés de rayons avec le système de tracé de rayons cinématiques, nous pouvons effectuer simultanément le tracé de rayons dynamique (voir annexe A1) pour calculer le Jacobien de rayons le long de chaque rayon et évaluer par la suite les amplitudes associées à l'aide de l'équation (1.50) du tracé de rayon dynamique. Un exemple du calcul d'amplitude du champ de propagation dans un milieu turbulent gaussien 3D est représenté en Figure 1-20 dans le cas d'une source sphérique située en $\mathbf{x}_0(0, 0, 0)$. On ne regarde que les rayons issus du point source et initiés autour de la direction x_1 dans une plage angulaire de 45° définie par $-\pi/8 < \vartheta_0 < \pi/8$. Les conditions initiales du tracé de rayons sont données par :

$$\begin{aligned} x_{10} &= x_{20} = x_{30} = 0, \\ p_{10} &= c^{-1} \sin \psi_0 \cos \vartheta_0, \\ p_{20} &= c^{-1} \sin \psi_0 \sin \vartheta_0, \\ p_{30} &= c^{-1} \cos \vartheta_0, \\ \text{avec } \psi_0 &= \pi/2, \quad -\pi/8 < \vartheta_0 < \pi/8. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Les tracés de rayons sont calculés pour une distance de propagation d'environ 1 m. Les trajectoires des rayons montrées en Figure 1-20-a sont déviées aléatoirement au cours de la propagation. Les amplitudes associées aux rayons sont montrées en Figure 1-20-b, les valeurs sont normalisées par rapport à la valeur de la source.

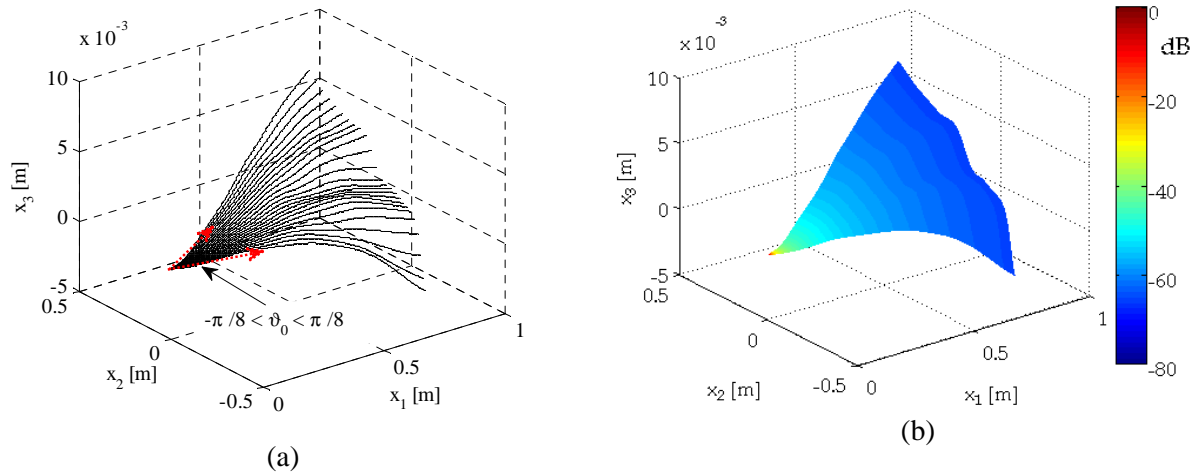


Figure 1-20 : Calcul d'amplitude du champ de propagation en milieu turbulent gaussien tridimensionnel issu d'une source sphérique située au point $(0, 0, 0)$: (a) tracés de rayons dans un espace 3D; (b) amplitudes associées aux tracés de rayons représentées par un code de couleur et normalisées par rapport à l'amplitude de la source.

Afin d'étudier l'influence de la variation de vitesse sur l'amplitude, nous évaluons les fluctuations d'amplitude par rapport à la valeur en milieu homogène en fonction de la distance de propagation et de la longueur caractéristique du milieu comme illustré en Figure 1-21. Nous pouvons remarquer que le profil de la variation d'amplitude est logiquement plus chahuté dans un milieu dont la longueur caractéristique est plus petite. Le niveau de fluctuation augmente avec la distance de propagation et ce niveau est aussi plus fort dans un milieu dont la longueur caractéristique est plus petite. Globalement, pour une distance de propagation inférieure à 1,2m, les amplitudes varient entre 0 et 0,1 dB par rapport au niveau en milieu homogène ; la variation reste donc très faible dans le milieu considéré dans notre étude. Nous choisissons donc dans la suite (§ 1.3.3) de modéliser l'amplitude du champ en milieu faiblement inhomogène et aléatoire en un point de calcul par celle obtenue en ce point

par le modèle de propagation en milieu homogène moyenné. Cette approximation de l'amplitude sera aussi utilisée dans le cadre du modèle stochastique complet de propagation développé au chapitre 2.

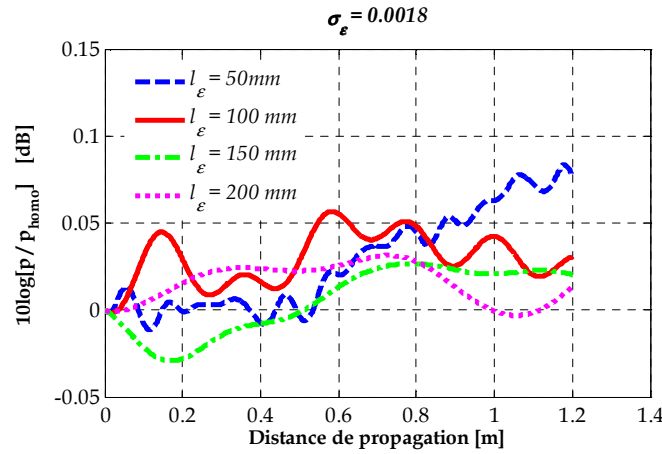


Figure 1-21: Fluctuations d'amplitude en fonction de la distance de propagation et de la longueur caractéristique du champ de vitesse ; l'écart-type $\sigma_\epsilon = 0.0018$ correspond à une variation de température maximale de 50°C.

1.3.3 Propagation d'un faisceau réaliste en milieu turbulent

Nous avons étudié dans la partie précédente la propagation d'une onde plane ou sphérique dans un milieu aléatoire gaussien. Des perturbations du champ de propagation ont alors été constatées. En revanche, dans les applications de contrôle non destructif (CND), on utilise toujours un transducteur comme source qui émet un faisceau acoustique. Il est donc nécessaire d'étudier l'influence du champ aléatoire sur la propagation d'un tel faisceau réaliste. Dans le logiciel CIVA, le faisceau acoustique rayonné par un transducteur réel est modélisé en utilisant la formule de Rayleigh-Sommerfeld avec une approche dite « méthode de pinceaux ». Cette approche a été appliquée par N. Gengembre [35] dans les milieux homogènes, hétérogènes, isotropes et anisotropes. Ici nous allons l'étendre à un milieu turbulent, dans le cadre d'un développement effectué hors Civa (Matlab), afin d'étudier l'influence de la variation aléatoire de vitesse sur la propagation d'un faisceau réaliste.

Nous considérons un transducteur plan et faisons l'hypothèse usuelle qu'il vibre en mode piston, c'est-à-dire que tous les points vibrent en phase avec la même amplitude. Pour modéliser un faisceau émis par un tel transducteur, nous pouvons appliquer le principe de Huygens : il s'agit de considérer chaque élément de la surface comme une source hémisphérique, le champ émis est une contribution de toutes ces sources (voir la Figure 1-23-a). Dans un milieu homogène en espace 3D, si les sources sphériques sont contenues dans un plan de dimension finie S_0 qui se situe dans le plan $x_3 = x_{30} = 0$ (voir la Figure 1-22), le potentiel de vitesse $\varphi(\mathbf{x}, t)$ généré au point $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ et à la pulsation ω peut être décrit par l'intégrale de Rayleigh-Sommerfeld [38] :

$$\varphi(\mathbf{x}, \omega) = \int_{S_0} V_n(\mathbf{x}_0, \omega) \frac{e^{-i\omega r/c}}{2\pi r} dS_0, \quad (1.56)$$

où $V_n(\mathbf{x}_0, \omega)$ est l'amplitude de la vitesse normale au point \mathbf{x}_0 , $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ la distance entre le point de calcul du champ et le point de la surface S_0 , c la vitesse du milieu de propagation. Si la surface S_0 est de dimension infinie, le champ généré est une simple onde plane. Quand la surface S_0 est de taille finie, l'effet de bord apparaît : le champ est composé par une onde

géométrique et deux ondes de bord provenant de chaque extrémité du transducteur, comme illustré en Figure 1-23-a et b.

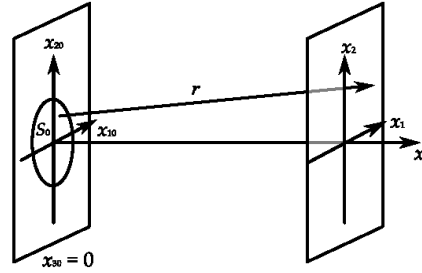


Figure 1-22: Géométrie du rayonnement d'une source surfacique de dimension finie dans un espace 3D

Dans le domaine du contrôle non destructif, les transducteurs utilisés pour générer des ondes acoustiques sont généralement excités en régime impulsif. L'intégrale de Rayleigh-Sommerfeld (1.56) s'exprime alors dans le domaine temporel par la transformée de Fourier inverse de $\phi(\mathbf{x}, \omega)$:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int_{S_0} \frac{v_n(\mathbf{x}_0, t - T_x)}{2\pi r} dS_0, \quad (1.57)$$

où $v_n(\mathbf{x}, t - T_x)$ est la vitesse normale à l'instant de l'émission $t - T_x$ avec T_x le temps de vol de parcours et $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$. Si tous les points de la source sont animés de la même vitesse normale $v(t)$:

$$v_n(\mathbf{x}_0, t) = V_n(\mathbf{x}_0)v(t), \quad (1.58)$$

avec $V_n(\mathbf{x}_0)$ le profil de l'amplitude de la surface S_0 et $v(t)$ le signal du transducteur. Nous pouvons écrire l'équation (1.57) de façon suivante :

$$\phi(\mathbf{x}, t) = v(t) \otimes \int_{S_0} \frac{V_n(\mathbf{x}_0)\delta(t - T_x)}{2\pi r} dS_0, \quad (1.59)$$

où \otimes désigne la produit de convolution. Selon cette dernière équation, le champ acoustique en un point donné \mathbf{x} est donc la somme des contributions de tous les éléments de la surface S_0 , chacune caractérisée par un retard (T_x) et une divergence en $(1/r)$.

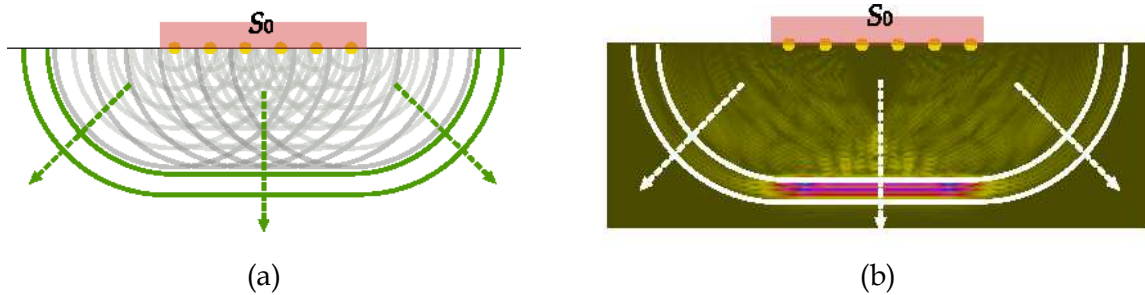


Figure 1-23: Rayonnement d'une surface S_0 constituée de sources hémisphériques élémentaires : (a) application du principe de Huygens : le rayonnement total est la superposition des rayonnements de toutes les sources hémisphériques ; (b) une simulation sous CIVA du champ de rayonnement d'un capteur circulaire.

Dans un milieu inhomogène et aléatoire, les trajets entre chaque élément de la surface S_0 et le point de calcul \mathbf{x} vont se déformer de façon aléatoire au cours de la propagation, ce qui va influencer le temps de vol associé (ou le retard T_x) et la divergence en $1/r$ de chaque contribution présente dans l'équation (1.59), et va créer un effet sur le champ sommé final en ce point de calcul par rapport au champ en milieu homogène. On va donc maintenant

s'intéresser à l'effet de la variation aléatoire du retard T_x sur l'interférence des signaux issus de chaque contribution au point de calcul x . Pour ce faire, nous allons placer de façon uniforme 81 sources hémisphériques sur une surface circulaire de diamètre de 30mm (voir la Figure 1-24-a) et chaque source permet d'émettre un signal modulé de forme gaussienne avec une fréquence centrale $F_c = 2\text{MHz}$ et une largeur de bande 60% (voir la Figure 1-24-b).

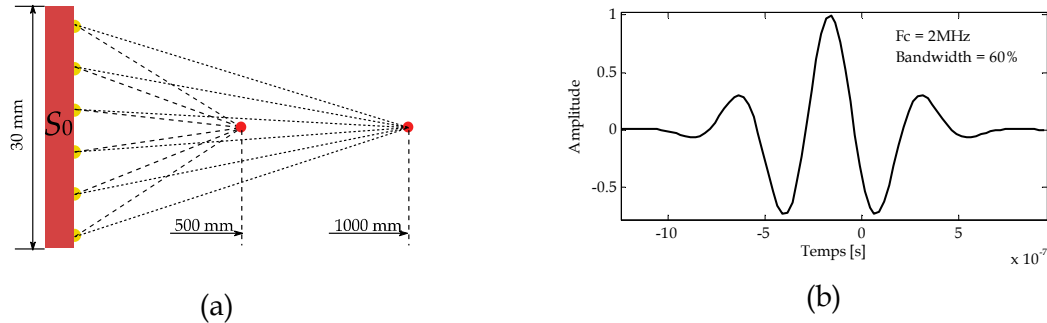


Figure 1-24: (a) Géométrie de la configuration d'étude de l'influence du retard T_x sur l'interférence des signaux ; (b) Signal élémentaire émis par chaque élément de surface.

Nous allons calculer les signaux de champ (qui résultent de la sommation des contributions de chaque rayon) en des points situés sur l'axe central de la surface S_0 à des distances de propagation différentes: $x_3 = 500\text{ mm}$ et 1000 mm (la Figure 1-24-a n'étant pas à l'échelle réelle). La variation du facteur de divergence $1/r$ d'un trajet à l'autre sera négligée dans cette étude car la taille de la surface S_0 est petite devant la distance de propagation.

Dans un premier temps, on positionne le transducteur dans un milieu fluide homogène, les retards sont calculés facilement le long des trajets acoustiques rectilignes. Les synthèses des réponses impulsionnelles (RI) calculés en milieu homogène sont illustrées en Figure 1-25- a et b pour les deux distances $x_3=0,5\text{ m}$ et $x_3=1,0\text{ m}$ à l'aide des courbes bleues continues. En milieu fluide inhomogène et aléatoire (sodium liquide à 200°C de vitesse moyenne 2472 m/s avec une variation aléatoire de 1% de vitesse), les temps de vol de chaque trajet sont perturbés par la variation de vitesse. Cette variation aléatoire de phase va détruire certaines interférences qui sont constructives en milieu homogène.

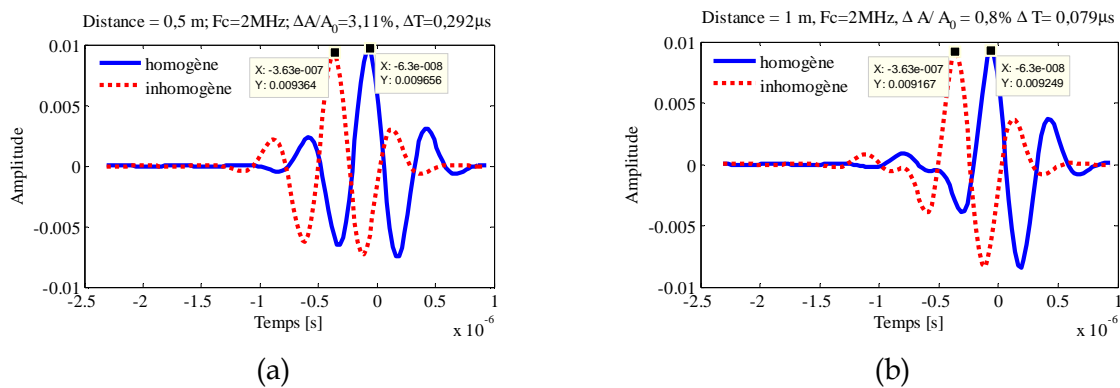


Figure 1-25: Synthèse des réponses impulsionnelles en un point de calcul de champ donné, les courbes bleues continues représentent les signaux calculés en milieu homogène ; les courbes rouges pointillées représentent les résultats de synthèse calculées en milieu inhomogène aléatoire à l'aide de la méthode de rayons : (a) distance = 0,5m ; (b) distance =1m.

En appliquant la méthode de rayons pour calculer les nouveaux trajets acoustiques et puis évaluer les retards de chaque source élémentaire, les résultats de la synthèse des réponses impulsionnelles sont montrés en Figure 1-25- a et b. Des modifications de l'amplitude maximale $\Delta A/A_0$ par rapport aux signaux en milieu homogène ont été constatées : 3,11% et 0,8% en deux points de distances $x_3=0,5\text{ m}$ et $x_3=1\text{ m}$ respectivement ; on

constate également des variations des retards ΔT par rapport aux signaux en milieu homogène : $\Delta T = 0,29 \mu s$ et $\Delta T = 0,08 \mu s$ en deux points d'observation de distances $x_3 = 0,5 \text{ m}$ et $x_3 = 1 \text{ m}$ respectivement. Les signaux sont très faiblement modifiés par le milieu inhomogène aléatoire à la fois en termes d'amplitude et de forme d'onde ; ils subissent néanmoins un décalage temporel.

En prenant la valeur maximale des signaux synthétisés en chaque point de calcul, nous obtenons une cartographie du champ émis par un transducteur. Un exemple de calcul de champ en milieu fluide homogène est donné en Figure 1-26-a ; 2500 points de calcul sont compris dans une zone 2D : $-0,04 \text{ m} < x_1 < 0,04 \text{ m}$; $x_2 = 0$; $0,1 \text{ m} < x_3 < 1,4 \text{ m}$. Nous pouvons constater que l'énergie du faisceau émis par une surface de $0,03 \text{ m}$ est concentrée autour de l'axe central du transducteur. En revanche, quand l'onde se propage dans un milieu turbulent dont la variation de vitesse maximale est de 1% et la longueur caractéristique des inhomogénéités est de $0,1 \text{ m}$, la répartition de l'énergie n'est plus symétrique ; on observe une déviation de faisceau en Figure 1-26-b. Cette déviation de faisceau est due à l'effet de la variation des temps de vol sur l'interférence des réponses impulsionnelles. Mais les valeurs d'amplitude maximale du champ ne sont pas indépendantes d'un point de calcul de champ à un autre. En effet, dans un milieu turbulent gaussien, il existe une continuité spatiale de phase entre deux trajets voisins et cette continuité de phase liée à la continuité du champ de célérité se traduit par une cohérence spatiale des valeurs d'amplitude maximale du champ rayonné.

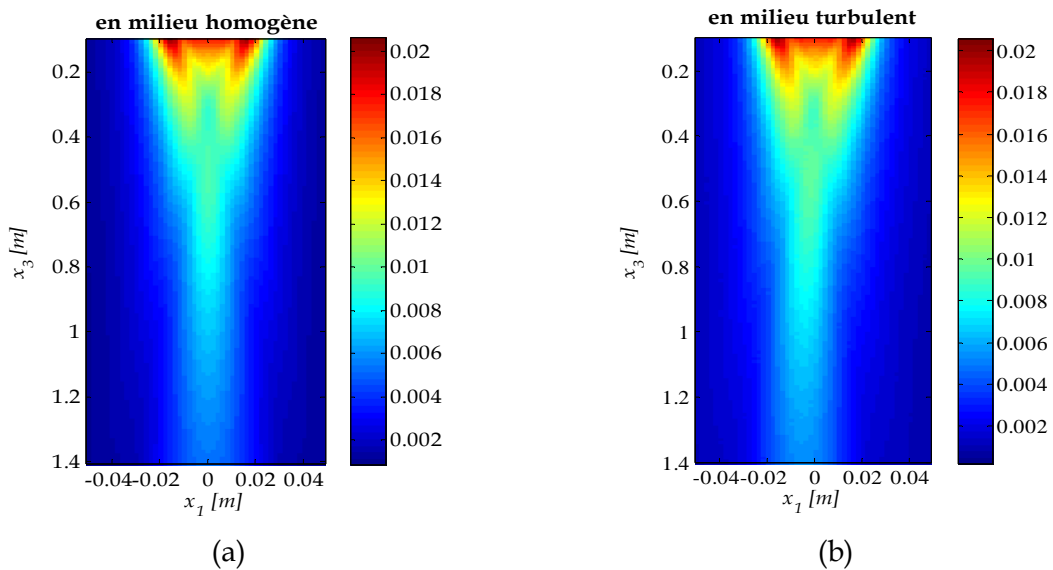


Figure 1-26: Champ émis dans une zone 2D par un transducteur circulaire de diamètre de 30mm : (a) – faisceau calculé dans un milieu homogène ; (b) – faisceau calculé dans un milieu turbulent.

Le résultat en Figure 1-26-b est issu d'une seule réalisation de cartographie de vitesse comme illustré en Figure 1-7. Afin d'étudier l'effet de la variation aléatoire de vitesse sur le champ acoustique final, nous allons effectuer le calcul de ce même champ avec un grand nombre de réalisations de cartographies de vitesse. Dans la Figure 1-27, nous montrons les répartitions d'amplitude sur une ligne normale à l'axe principal du transducteur (et située en $x_3 = 1,5 \text{ m}$) issues de nombreux calculs indépendants en milieu turbulent (courbes noires) et d'une référence en milieu homogène (courbe rouge). On trouve que la déviation maximale de faisceau est de l'ordre de $\pm 0,02 \text{ m}$ autour de l'axe principal.

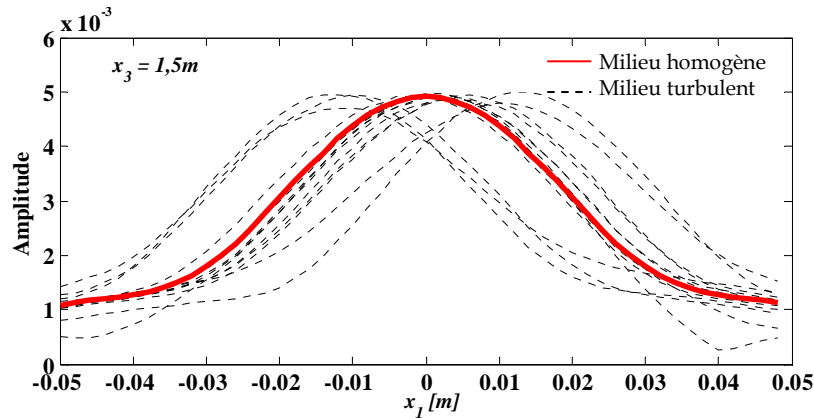


Figure 1-27: Répartitions d'amplitude simulées sur une ligne normale à la direction de propagation, issues de nombreux calculs indépendants en milieu turbulent (courbes noires pointillées) et d'une référence en milieu homogène (courbe rouge).

Avec la méthode de rayons, nous avons pu simuler la propagation en milieu aléatoire d'un faisceau réaliste émis par un traducteur plan. Pour les configurations de notre cas d'étude, l'effet de la variation aléatoire de vitesse provoque une déviation de faisceau. Néanmoins, le modèle de rayons en milieu inhomogène s'avère couteux en temps de calcul à cause des itérations numériques effectuées pour calculer les tracés de rayons.

1.4 CONCLUSION ET DISCUSSION

Dans ce chapitre, une première problématique à traiter a été identifiée : il s'agit donc de modéliser la propagation d'une onde acoustique dans le sodium liquide au cœur du réacteur. En considérant la situation réelle du milieu de propagation, nous avons fait le choix de modéliser ce milieu comme la contribution de deux champs de célérité du son : une partie inhomogène stationnaire, correspondant a priori à un gradient constant de température, et une partie aléatoire de moyenne nulle. Afin de modéliser la propagation d'onde en milieu inhomogène, il faut résoudre l'équation d'onde en milieu inhomogène et de nombreuses méthodes de résolution existent. Parmi les différentes approches analytiques existantes, nous avons sélectionné la méthode de rayons dont les conditions de validité correspondent à notre cas d'étude. Cette méthode déterministe consiste à résoudre deux équations différentielles : l'équation eikonale et l'équation de transport. La première nous permet de calculer les tracés de rayons et les temps de vol associés ; la deuxième équation fournit les résultats des amplitudes associées aux rayons.

Le calcul du champ de propagation dans un milieu inhomogène stationnaire du type gradient de vitesse constant est relativement simple à mettre en œuvre par cette méthode déterministe de rayons. La méthode déterministe de rayons est donc la solution à adopter pour modéliser la propagation dans un tel milieu inhomogène stationnaire.

Pour simuler la propagation d'onde en milieu aléatoire, nous avons ensuite généré une cartographie de vitesse aléatoire gaussienne dont les propriétés statistiques sont celles du milieu réel. La méthode de rayons est ensuite appliquée pour calculer le champ de propagation avec comme entrée la cartographie de vitesse générée. Nous avons remarqué que les rayons sont déviés en raison de la variation de célérité créant des caustiques et les temps de vol sont perturbés aléatoirement mais avec une cohérence spatiale de phase entre rayons voisins. Les perturbations en termes d'amplitude sont relativement faibles dans notre cas d'étude. Nous choisissons donc dans la suite de prendre en compte uniquement la variation des temps de vol et l'amplitude du champ en milieu aléatoire sera modélisée par celle obtenue par le modèle déterministe (de rayons) de propagation en milieu homogène moyenné. Pour réaliser une simulation plus réaliste de CND, nous avons modélisé par

application de l'intégrale de Rayleigh la source constituée d'un transducteur réel circulaire qui émet un faisceau acoustique. La propagation du faisceau acoustique ainsi généré a été modélisée dans un milieu aléatoire. On a constaté une influence de la variation des temps de vol sur la réponse impulsionnelle en un point de calcul, laquelle au final provoque une déviation de faisceau par rapport à l'axe. Cependant, la méthode de rayons en milieu aléatoire est coûteuse en temps de calcul et l'intégration logicielle est également compliquée.

Dans le chapitre suivant, nous allons, dans un souci d'optimisation de temps de calcul, développer et valider un modèle stochastique afin de simuler la propagation d'onde en milieu aléatoire car après propagation dans un milieu aléatoire le champ acoustique devient lui-même un champ aléatoire. L'idée est d'incorporer une simple correction en termes de temps de vol au modèle de propagation en milieu homogène afin de rendre compte de l'effet d'inhomogénéité.

2 MODELISATION STOCHASTIQUE DU CHAMP ACOUSTIQUE EN MILIEU ALEATOIRE

Dans le chapitre précédent, le champ de propagation dans un milieu inhomogène et aléatoire est calculé par l'utilisation d'une méthode déterministe, la méthode de rayons, pour une cartographie de vitesse donnée. Mais la méthode de rayons s'avère très coûteuse quand on désire caractériser l'effet de la variation aléatoire de vitesse du son sur le champ de propagation en appliquant cette méthode à un grand nombre de réalisations de cartographies de vitesse tirées aléatoirement.

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode alternative pour modéliser le champ de propagation dans un milieu aléatoire, une modélisation stochastique : elle consiste à incorporer une correction sous forme de champ aléatoire au résultat calculé dans un milieu homogène moyenné. En effet, après une propagation en milieu aléatoire, le champ de propagation devient lui-même un champ aléatoire qui est fonction des propriétés statistiques du milieu de propagation. Les résultats obtenus avec la méthode de rayons dans notre cas d'étude (milieu faiblement inhomogène) ont montré que la variation de célérité du milieu génère un effet à la fois sur les temps de vol et sur les amplitudes associés aux rayons mais que seul l'impact sur les temps de vol modifie de manière significative la propagation par comparaison avec un milieu homogène. La correction à apporter portera donc uniquement sur le temps de vol ; elle est fournie par un modèle d'aberration aléatoire de phase dont les entrées sont les moments statistiques des temps de vol (moyenne, variance ainsi que certaines fonctions de corrélations spatiales). Au §2.2, nous établissons les expressions analytiques de ces entrées à l'aide de la méthode de perturbation. Contrairement à la modélisation déterministe qui suppose l'existence d'une relation unique entre les entrées et les variables de sortie observées, la modélisation stochastique considère que les observations sont le résultat d'un tirage aléatoire qui tient compte à la fois de la distribution statistique de temps prédéfinie (moments d'ordre 1) et de la cohérence de phase qui existe entre trajets acoustiques voisins, par le biais des fonctions de corrélations spatiales (moments d'ordre 2) employées.

Cette technique sera appliquée à la simulation stochastique d'un faisceau acoustique émis par un transducteur réel et perturbé par un champ aléatoire de vitesse. Nous verrons que nous retrouvons des résultats similaires à ceux produits par la méthode déterministe.

2.1 INTRODUCTION

2.1.1 Modélisation stochastique

Dans de nombreuses applications, par exemple pour la météorologie, la séismologie, l'imagerie médicale, la sûreté nucléaire ou encore la finance, on essaie de comprendre et de modéliser certains événements de nature aléatoire. Les paramètres qui permettent de décrire ces événements présentent une nature stochastique. Cependant la description de ces systèmes et la prévision des événements correspondants ne sont plus possibles avec un modèle déterministe classique. La maîtrise et la prise en compte des incertitudes de ces paramètres sont pourtant essentielles dans la simulation de ces systèmes. Les méthodes de Monte-Carlo jouent désormais un rôle de plus en plus important dans la simulation stochastique afin d'obtenir des résultats plus représentatifs de la réalité. Ce sont des méthodes qui visent à générer une suite d'événements qui sont d'un point de vue mathématique la réalisation d'une suite de variables aléatoires indépendantes mais ayant la même loi de probabilité. Les méthodes de simulation de Monte-Carlo sont ainsi particulièrement utilisées pour modéliser des systèmes aléatoires multidimensionnels, par exemple pour calculer la surface de l'océan, estimer la structure cellulaire, ou l'exploration pétrolière.

Dans notre étude, le système à modéliser est la propagation d'onde dans un milieu fluide inhomogène. Comme nous l'avons déjà remarqué dans la partie §1.3, avec un champ de vitesse aléatoire, la grandeur en sortie du modèle, c'est-à-dire le champ acoustique rayonné (amplitude, temps de vol) devient lui-même un champ aléatoire qui dépend des moments statistiques de vitesse. Afin d'analyser les caractéristiques statistiques du champ acoustique après propagation dans un tel milieu aléatoire, il faut générer aléatoirement un grand nombre de champs aléatoires de vitesse différents, puis, sur chacun d'entre eux, effectuer un calcul de champ acoustique avec le modèle déterministe. En effectuant des statistiques sur les résultats obtenus, on accède ainsi aux moments statistiques (moyenne et covariance) du champ acoustique perturbé par la variation de vitesse. Une telle application du modèle déterministe génère cependant un coût de calcul très important. Afin de réduire le temps de calcul, nous avons décidé de développer, à la place du modèle déterministe de propagation en milieu inhomogène, un modèle stochastique de propagation qui consiste à coupler un modèle de propagation en milieu homogène à un champ de correction aléatoire.

Comme montré au §1.3.2 du chapitre 1, la fluctuation d'amplitude induite par la variation aléatoire de vitesse est très faible, ce qui explique que la majeure partie de l'étude porte uniquement sur les temps de vol. C'est ainsi que le principe du modèle stochastique (illustré en Figure 2-1) est d'appliquer une simple correction en termes de temps de vol au modèle de propagation dans un milieu homogène moyenné, obtenu par l'homogénéisation du milieu de propagation réel en utilisant sa vitesse du son moyenne. Sachant que le modèle de propagation dans un fluide homogène est déjà développé et intégré dans le logiciel CIVA (il est fondé sur la méthode de rayons), la correction en termes de temps de vol est donc l'essence du modèle stochastique qui permet de prendre en compte l'influence des fluctuations aléatoires de vitesse de son. Cette correction est calculée par une aberration aléatoire de phase basé sur un algorithme de générateur de champ aléatoire du type Monte-Carlo, en rendant compte à la fois des propriétés statistiques de temps de vol et de la continuité spatiale de phase qui existe entre les trajets acoustique voisins. L'aberration aléatoire de phase a besoin comme entrée des moments statistiques (moyenne, variance et les fonctions de corrélation) des temps de vol pour générer un champ de fluctuations des temps de vol. A partir des caractéristiques statistiques du milieu de propagation (moyenne et variance de vitesse, fonction de corrélation, longueur caractéristique), nous allons calculer, à

l'aide de la méthode de perturbation (présentée au §2.2), les moments statistiques des temps de vol.

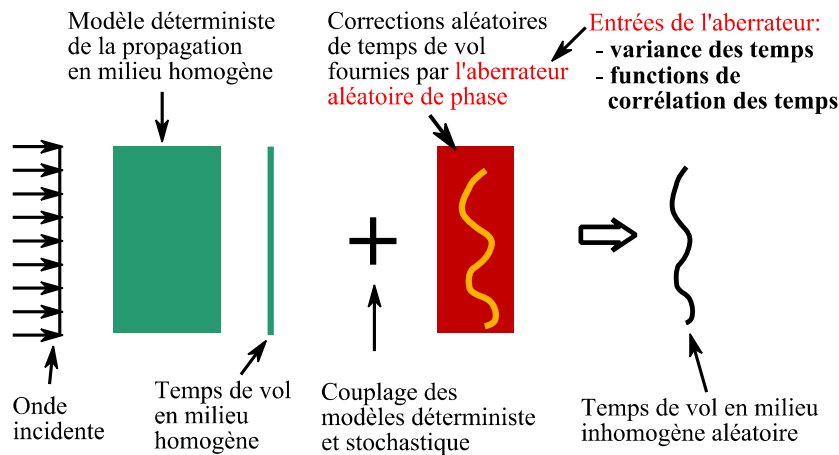


Figure 2-1: Principe du modèle stochastique de propagation, le trait vert représente les temps de vol d'une onde plane après propagation en milieu homogène.

A l'aide du champ des fluctuations des temps de vol généré dans tout l'espace, nous allons développer le modèle stochastique de propagation d'une onde plane (présenté au §2.3) dans un premier temps. Ce modèle stochastique est ensuite appliqué pour simuler la propagation d'un faisceau acoustique (§2.4) généré par un transducteur dans un milieu aléatoire.

2.1.2 Etat de l'art

Les moments statistiques des temps de vol servent d'entrées à l'aberration aléatoire de phase développée dans ce chapitre. Des études concernant les moments statistiques (moyenne, variance, fonctions de corrélation) des temps de vol, les entrées de l'aberration aléatoire de phase, sont présentées dans un premier temps, ainsi que les liens avec les propriétés statistiques du milieu de propagation, étudiés par nombreux auteurs à l'aide de la méthode de perturbation. L'aberration aléatoire de phase développée se fonde sur un générateur de champ aléatoire du type Monte Carlo ; les différentes techniques existantes sur le sujet ont donc été étudiées. Après une étude des avantages et des inconvénients de chaque méthode, la méthode la mieux adaptée à nos besoins est choisie pour le développement de l'aberrateur.

2.1.2.1 Méthode de perturbation

La méthode de perturbation initialement proposée par Boyse [39] et Snieder [40] consiste à exprimer l'expression de la solution de l'équation d'onde sous la forme d'une série asymptotique en puissances du facteur de perturbation ε du champ de vitesse ; on évalue par la suite analytiquement les moments statistiques (moyenne, covariance) de cette série afin d'obtenir les moments statistiques de la solution de l'équation d'onde en fonction de ceux du milieu de propagation. Par exemple, si on désire évaluer le temps de vol T , on écrit l'expression de la solution de l'équation eikonale (1.35) (dans le cadre de l'optique géométrique) sous la forme d'une série asymptotique $T = T_0 + T_1 + T_2 + \dots$, où T_1 est d'ordre ε , T_2 est d'ordre ε^2 et on évalue ensuite leur moyenne et covariance.

L'approximation au premier ordre de Chernov [41] prédit une augmentation linéaire de la variance des temps de vol en fonction de la distance de propagation. Mais cette approximation est valide jusqu'à une distance limite de propagation. L'approximation au

second ordre de la variance des temps a été calculée par Iooss *et al.* [42] ; il a mis en évidence le comportement non-linéaire de la variance des temps et sa prédiction théorique a été validée par les travaux de Karweit *et al.* [8]. Les corrélations spatiales de phase qui caractérisent la continuité spatiale de phase ont été calculées analytiquement dans le cadre des travaux de Rytov *et al.* [17] et de Boyse & Keller [39] en appliquant la méthode de perturbation. Ils ont prouvé que la fonction de corrélation spatiale des temps de vol est fortement liée à la fonction de corrélation spatiale de la cartographie de vitesse dans la direction perpendiculaire à la direction de propagation. Selon la direction de propagation, une fonction de corrélation des temps de vol asymétrique a été donnée par Rytov *et al.* [17]. Ces études par la méthode de perturbation nous fournissent les expressions analytiques des moments statistiques des temps de vol qui sont les entrées du modèle d'aberration aléatoire de phase (cf. §2.2).

2.1.2.2 Générateurs de champ aléatoire

Dans le cadre de la simulation stochastique, l'aberration aléatoire de phase qui fournit la correction des temps de vol peut être construite par de nombreuses méthodes ; nous nous intéressons ici aux nombreuses techniques permettant de générer un champ aléatoire scalaire multidimensionnel $Z(\mathbf{x})$, \mathbf{x} étant un vecteur dans un espace à n dimensions : $x \in \mathbb{R}^n$. Nous allons choisir parmi elles la technique la mieux adaptée à nos besoins.

- La méthode moyenne glissante ou moyenne mobile (Moving Average) est un type de moyenne statistique utilisée pour le calcul d'un champ aléatoire. Elle consiste à construire un champ aléatoire $Z(\mathbf{x})$ par la moyenne pondérée d'un bruit blanc qui est un tirage aléatoire de variables suivant une loi de probabilité donnée :

$$Z(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi - \mathbf{x}) dW(\xi), \quad (2.1)$$

où $dW(\xi)$ est un bruit blanc avec sa variance $d\xi$ et f est la fonction de poids qui dépend du coefficient de corrélation (voir sa définition en Annexe 3 : A.3.8) du champ aléatoire recherché. Avec cette méthode, Black *et al.* [43] et Spanos *et al.* [44] ont obtenu des résultats très précis ; en revanche le temps de calcul est très important par rapport à certaines méthodes que nous allons présenter par la suite, car nous devons effectuer une intégration du type (2.1) pour chaque point \mathbf{x} .

- La méthode de décomposition de matrice développée par David [45] et Fai Ma et Mills [46] est une méthode directe pour générer un champ aléatoire à partir d'une fonction de covariance $C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ (voir la définition en Annexe A3) où \mathbf{x}_i avec $i, j = 1, 2, \dots, N$ est une suite de points dans l'espace. Si la fonction $C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ est une matrice définie positive, un champ aléatoire discret $Z(\mathbf{x}_i)$ de moyenne nulle peut être obtenu de façon suivante

$$Z = LV, \quad (2.2)$$

où L est une matrice triangulaire inférieure (L comme "Low", bas) qui satisfait à $LL^T = C$ où T signifie la transposée (obtenue souvent par la factorisation de Cholesky [47]) et V est un vecteur de taille N de moyenne nulle dont la distribution de valeurs est gaussienne. Connue pour sa simplicité et sa précision, cette méthode est néanmoins applicable uniquement pour des champs de petite taille. Par exemple, dans un espace à deux dimensions, pour générer un champ de taille $N \times N$, il faut une matrice de covariance $C(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ de taille $N^2 \times N^2$. La décomposition de Cholesky est de plus très coûteuse en

temps de calcul pour une grande taille de matrice et l'erreur obtenue dans la prédiction du champ aléatoire $Z(\mathbf{x})$ est également considérable.

- La méthode de représentation spectrale consiste à représenter le champ aléatoire $Z(\mathbf{x})$ sous forme d'une intégrale de Fourier

$$Z(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}} W(d\boldsymbol{\omega}) \quad (2.3)$$

où $W(d\boldsymbol{\omega})$ est un processus aléatoire de moyenne nulle et de variance $S(\boldsymbol{\omega})d\boldsymbol{\omega}$ où $S(\boldsymbol{\omega})$ est la fonction de densité spectrale du champ aléatoire $Z(\mathbf{x})$, laquelle représente dans l'espace des fréquences la distribution d'énergie de la fluctuation aléatoire du champ $Z(\mathbf{x})$. Le concept a été introduit par Rice [48] et Yaglom [49] et largement développé dans le cadre des travaux de Shinozuka [50, 51, 52, 53] pour les applications en mécanique aléatoire. Shinozuka interprète initialement l'intégrale (2.3) comme une somme des fonctions trigonométriques pondérées par la fonction $S(\boldsymbol{\omega})$. De plus, dans cette approche, le temps de calcul a été largement réduit avec l'utilisation de l'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT) [54]. Cette méthode a été utilisée par Fiorina pour modéliser un champ turbulent thermique [23] et dans cette thèse dans la même optique dans le chapitre 1 (§1.3 consacré à la modélisation d'un milieu aléatoire gaussien afin d'étudier la propagation d'onde dans un tel milieu). Cette technique est également employée par Blanc-Benon [55] et Karweit [8] pour générer un champ turbulent aérien.

- La méthode de bandes tournantes (the Turning Bands Methods, TBM), initialement proposée par Matheron [56], fournit une simulation de champs aléatoires dans l'espace de dimension deux ou supérieure et est appliquée à la simulation de l'écoulement de l'eau souterraine par Mantoglou et Wilson [57]. Le principe de cette méthode est le suivant. On calcule dans un premier temps un processus aléatoire unidimensionnel Z_i avec la méthode de représentation spectrale présentée précédemment. On assemble ensuite ces processus aléatoires unidimensionnels Z_i dans un espace multidimensionnel le long de lignes \mathbf{u}_i à travers cet espace. La formule est donnée par

$$Z(\mathbf{x}_k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N Z_i(\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{u}_i), \quad (2.4)$$

où N est le nombre des lignes prises en compte et où le vecteur \mathbf{u}_i représente l'orientation de la ligne i . C'est une méthode facile à implémenter, puisqu'on ne génère que le champ 1-D sur chaque ligne et on les assemble pour construire des champs aléatoires de dimension supérieure. La méthode est très efficace et permet de générer des résultats très précis quand le nombre de lignes N est suffisamment grand. Cependant, étendre cette méthode à la génération d'un champ aléatoire anisotrope est moins facile qu'avec la méthode de représentation spectrale.

- On trouve également la méthode de moyenne locale par subdivision (Local Average Subdivision Method, LAS) proposée par Fenton [58]. Selon Fenton, elle fournit des résultats précis avec le temps de calcul le plus court parmi toutes les méthodes. Mais cette méthode est très difficile à implémenter comparée aux autres méthodes.

Dans la modélisation stochastique des temps de vol, la méthode de représentation spectrale est finalement choisie comme la technique qui permet de construire l'aberration aléatoire de phase et ce pour sa simplicité, son efficacité et son applicabilité au cas anisotrope.

2.2 PREDICTION DES FLUCTUATIONS DES TEMPS DE VOL PAR LA METHODE DE PERTURBATION

Comme nous l'avons expliqué dans §2.1.1, le modèle stochastique est composée de deux parties, une partie concernant la propagation en milieu homogène moyenné, et une correction des temps de vol fournie par une aberration aléatoire de phase. Les entrées de cette aberration sont les moments statistiques des temps de vol qui sont obtenus analytiquement par l'application de la méthode de perturbation. Dans cette partie, nous nous intéressons donc à cette méthode, proposée initialement par Rytov *et al.* [17] et Boyse et Keller [39].

La méthode de perturbation consiste à exprimer le temps de vol $T(\mathbf{x})$ sous forme d'un développement en puissances de la grandeur ε qui représente la perturbation aléatoire de l'indice de réfraction du milieu définie par l'équation (1.4), soit :

$$T(\mathbf{x}) = T_0(\mathbf{x}) + T_1(\mathbf{x}, \varepsilon) + T_2(\mathbf{x}, \varepsilon^2) + O(\varepsilon^3). \quad (2.5)$$

En reportant l'équation (2.5) dans l'équation eikonale (1.12) et en ne conservant que les trois premiers termes en puissance de ε , il vient

$$\nabla T_0 \cdot \nabla T_0 = 1/c_0^2, \quad (2.6.a)$$

$$\nabla T_0 \cdot \nabla T_1 = \varepsilon/2c_0^2, \quad (2.6.b)$$

et

$$\nabla T_0 \cdot \nabla T_2 = \varepsilon^2/4c_0^2 - (\nabla T_1)^2. \quad (2.6.c)$$

Comme nous avons défini dans le chapitre 1 (Figure 1-5) un repère cartésien $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_\perp, x\} \in \mathbb{R}^3$, où x est la direction de la propagation d'une onde plane de la forme $P(\mathbf{x})\exp(ikx)$ et où \mathbf{x}_\perp est le plan perpendiculaire à cette direction de propagation. Les conditions initiales en $x = 0$ sont

$$T_0(x=0) = T_1(x=0) = T_2(x=0) = 0. \quad (2.7)$$

L'équation (2.6.a) pour T_0 admet deux solutions $T_0(x) = \pm x/c_0$; nous choisissons le signe plus pour obtenir une onde se propageant vers des valeurs croissantes de x . Des intégrations successives des équations (2.6.b) et (2.6.c) permettent ensuite de résoudre ces deux équations; on obtient donc une évaluation du temps de vol

$$T(\mathbf{x}) = T_0 + T_1 + T_2 = \frac{x}{c_0} + \frac{1}{2c_0} \int_0^x \varepsilon(x', \mathbf{x}_\perp) dx' - \frac{1}{4c_0} \int_0^x \left[\int_0^{x'} \frac{x''}{x'} \nabla_\perp \varepsilon(x'', \mathbf{x}_\perp) dx'' \right]^2 dx', \quad (2.8)$$

où ∇_\perp représente l'opérateur de gradient transversal à la direction de propagation x , et où x' , et x'' sont les variables courantes d'intégration. Dans les deux parties suivantes §2.2.1 et §2.2.2, nous allons déterminer les expressions analytiques des moments statistiques des temps de vol (moyenne et fonction de covariance) en évaluant analytiquement l'équation (2.8). Ces moments statistiques des temps seront également évalués à partir des temps de vol issus d'un grand nombre de calculs du champ de propagation avec la méthode de rayons (pour chaque calcul, on génère une nouvelle cartographie de vitesse comme entrée du modèle); les résultats obtenus de cette façon sont appelés « solutions expérimentales numériques ». La comparaison des résultats analytiques et « expérimentaux » nous permettra de valider les solutions analytiques dans notre cas d'application. Nous allons donc choisir les solutions analytiques comme entrées du modèle stochastique.

2.2.1 Moyenne des temps de vol

Sachant que dans l'équation (2.8), le premier terme x/c_0 est constant et que la moyenne de $\varepsilon(\mathbf{x})$ est nulle, l'intégrale de 0 à x de $\varepsilon(\mathbf{x})$ dans l'équation (2.8) est donc également nulle, donc la moyenne du temps T_1 notée $\langle T_1(\mathbf{x}) \rangle$ est nulle, et la moyenne du temps de vol $T(\mathbf{x})$ devient

$$\langle T(\mathbf{x}) \rangle = \frac{x}{c_0} + \langle T_2(\mathbf{x}, \varepsilon^2) \rangle, \quad (2.9)$$

avec

$$\langle T_2(\mathbf{x}) \rangle = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{8c_0} \frac{x^2}{l_\varepsilon} \int_0^\infty \frac{R'(x')}{x'} dx', \quad (2.10)$$

où $R'(x')$ est la dérivée du coefficient de corrélation $R(x')$ (voir la définition en Annexe A3). Pour un coefficient de corrélation de forme gaussienne défini par l'équation (1.48), on a :

$$\int_0^\infty \frac{R'(x')}{x'} dx' = \int_0^\infty \frac{[\exp(-x'^2)]'}{x'} dx' = -2 \int_0^\infty \exp(-x'^2) dx' = -\sqrt{\pi}. \quad (2.11)$$

Remarquons que la moyenne du temps de vol du second ordre $T_2(\mathbf{x})$ est négative ; elle diminue proportionnellement au carré de la distance de propagation. On définit la vitesse effective de propagation d'onde dans un milieu aléatoire par

$$c_{\text{eff}} = \left\langle \frac{x}{T(\mathbf{x})} \right\rangle = \left\langle \frac{x}{T_0 + T_1 + T_2} \right\rangle = x \left\langle \frac{1}{T_0 + (T_1 + T_2)} \right\rangle, \quad (2.12)$$

où $(T_1 + T_2) \ll T_0$. Un développement limité du type $\frac{1}{1+\alpha} = 1 - \alpha + \alpha^2 + \dots$ de l'équation (2.12) permet d'obtenir :

$$c_{\text{eff}} = x \left\langle \frac{1}{T_0 + (T_1 + T_2)} \right\rangle = \frac{x}{T_0} \left\langle 1 - \frac{T_1 + T_2}{T_0} \right\rangle = c_0 - \frac{c_0^2}{x} \langle T_2 \rangle. \quad (2.13)$$

Comme la moyenne $\langle T_2 \rangle$ est négative d'après les relations (2.10) et (2.11), la vitesse effective d'un milieu aléatoire est supérieure à la vitesse moyenne du milieu réel, $c_{\text{eff}} > c_0$. En effet, selon le principe de Fermat, l'onde se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours soit extrémale, autrement dit, l'onde se propage le long des trajectoires où les vitesses sont relativement plus rapides.

En Figure 2-2, nous comparons le résultat analytique de la moyenne de temps du second ordre $\langle T_2 \rangle$ (trait plein) donnée par l'équation (2.10) avec celui obtenu par moyennage des résultats simulés par la méthode de rayons (marqueur carré) en utilisant les configurations de l'exemple présenté en §1.32, c'est-à-dire $\sigma_\varepsilon = 0.0018$, $c_0 = 2472,5$ m/s et $l_\varepsilon = 100$ mm. Les résultats sont présentés en fonction de la distance de propagation réduite x/l_ε .

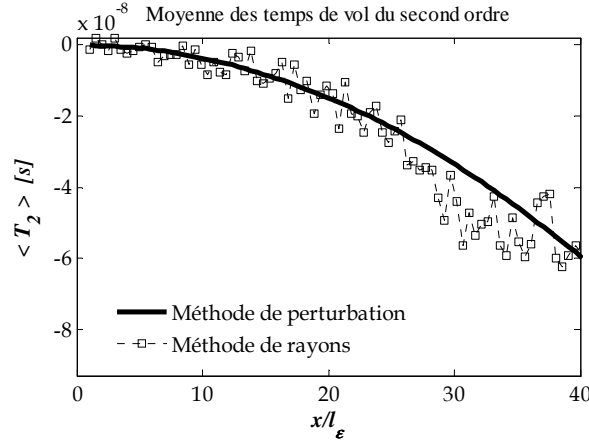


Figure 2-2: Moyenne des temps de vol du second ordre en fonction de la distance de propagation : comparaison entre la prédiction analytique et les résultats issus de la méthode de rayons.

On constate un bon accord entre la prédiction de la solution analytique par la méthode de perturbation et les résultats extraits depuis les calculs de la méthode de rayons. Remarquons que pour une distance $x/l_\epsilon = 40$ (correspondant en pratique à une distance $x = 4$ m), le temps de vol moyen $\langle T_0 \rangle$ est de 0,016 s et la variation de la moyenne induite par $\langle T_2 \rangle$ est de l'ordre de 6×10^{-8} s, ce qui correspond à une modification de 0,0037%. Il n'est donc pas nécessaire de prendre en compte cette modification induite par la moyenne des temps du second ordre $\langle T_2 \rangle$.

En conclusion, nous faisons dans la suite l'approximation de la moyenne des temps de vol d'ordre zéro :

$$\langle T(\mathbf{x}) \rangle = \langle T_0(\mathbf{x}) \rangle = \frac{x}{c_0}, \quad (2.14)$$

ce qui représente le champ de temps de propagation dans un milieu homogène moyenné. La simulation stochastique du champ de propagation dans un milieu aléatoire consiste à ajouter à ce résultat une partie fluctuante obtenue par l'aberration aléatoire de phase (présentée au §2.3) qui génère un champ aléatoire des temps de vol. L'entrée de cette aberration aléatoire de phase est la fonction de covariance spatiale des temps de vol dans le milieu aléatoire étudié (voir l'annexe A3); cette fonction permet de décrire les dépendances du temps de vol entre deux points distincts. Nous allons présenter dans la partie suivante les expressions analytiques de cette fonction de covariance.

2.2.2 Covariance spatiale des temps de vol

Dans cette partie, nous allons chercher les entrées de l'aberration statistique de phase (voir la Figure 2-1), c'est-à-dire la variance, les fonctions de corrélation spatiale des temps de vol. Pour cela, nous allons d'abord introduire la covariance spatiale des temps de vol, à partir de laquelle nous pouvons déduire les entrées recherchées. La covariance des temps est calculée analytiquement à partir l'expression de temps de vol (2.8) qui est en fonction des propriétés statistiques du milieu de propagation. La covariance spatiale des temps de vol est définie par

$$C_T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \langle [T(\mathbf{x}_1) - \langle T(\mathbf{x}_1) \rangle][T(\mathbf{x}_2) - \langle T(\mathbf{x}_2) \rangle] \rangle, \quad (2.15)$$

où \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 sont deux points dans l'espace \mathbf{x} . Si on ne prend que les deux premier termes du temps : $T(\mathbf{x}) = T_0(\mathbf{x}) + T_1(\mathbf{x})$ où $T_0(\mathbf{x})$ est constant et $T_1(\mathbf{x}) = 1/2c_0 \int_0^{x_1} \epsilon(x', \mathbf{x}_\perp) dx'$ selon l'équation

(2.8). Or la covariance de deux séries de variables est la covariance de la partie fluctuante de ces variables donc la covariance spatiale des temps de vol $C_T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ peut être calculée à partir des termes du premier ordre $T_1(\mathbf{x})$:

$$C_T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \langle T_1(\mathbf{x}_1) T_1(\mathbf{x}_2) \rangle = \frac{1}{4c_0^2} \int_0^{x_1} dx' \int_0^{x_2} dx'' C_\varepsilon(\boldsymbol{\rho}, x' - x''), \quad (2.16)$$

où C_ε est la fonction de covariance du milieu de propagation (définie en Annexe 3), $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{x}_{\perp 2} - \mathbf{x}_{\perp 1}$ est le vecteur reliant deux points situés dans le plan \mathbf{x}_\perp perpendiculaire à la direction de propagation, $x_1 = |\mathbf{x}_1|$ et $x_2 = |\mathbf{x}_2|$ (où le symbole $||$ fait référence à la norme d'un vecteur) représentent deux distances de propagation selon la direction de propagation ; x' et x'' sont les deux variables courantes de la double intégrale. Cette double intégrale est évaluée par la méthode de changement de variables proposée par Rytov [17], en posant $\zeta = x' - x''$ et $\eta = (x' + x'')/2$. L'intégrale (2.16) devient :

$$C_T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{1}{4c_0^2} \iint_{\Sigma} d\zeta d\eta C_\varepsilon(\boldsymbol{\rho}, \zeta), \quad (2.17)$$

où Σ est la surface d'intégration dans le plan (ζ, η) , qui est un parallélogramme pour le cas $x_2 > x_1$ présenté en Figure 2-3.

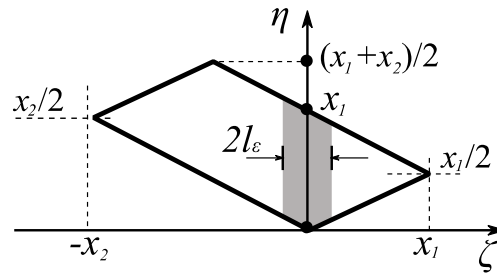


Figure 2-3: Zone effective (ombrée) de la double intégration dans (2.17)

Pour une covariance de forme gaussienne, les valeurs non nulles de la fonction de covariance $C_\varepsilon(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ se situent dans l'intervalle $(-l_\varepsilon, l_\varepsilon)$; la zone effective d'intégration se réduit donc à la zone $(-l_\varepsilon < \zeta < l_\varepsilon, 0 < \eta < x_1)$ (zone ombrée dans la Figure 2-3). Comme la fonction C_ε est nulle en dehors de l'intervalle $(-l_\varepsilon, l_\varepsilon)$, la zone d'intégration $(-l_\varepsilon < \zeta < l_\varepsilon, 0 < \eta < x_1)$ est donc équivalente à la zone $(-\infty < \zeta < \infty, 0 < \eta < x_1)$ et l'intégrale (2.17) devient alors

$$C_T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \approx \frac{1}{4c_0^2} \int_0^{x_1} d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} C_\varepsilon(\boldsymbol{\rho}, \zeta) d\zeta = \frac{x_1}{2c_0^2} \int_0^{+\infty} C_\varepsilon(\boldsymbol{\rho}, \zeta) d\zeta. \quad (2.18)$$

Dans l'expression précédente, x_1 doit être remplacé par x_2 , lorsque $x_2 < x_1$. On peut donc l'exprimer sous une forme plus générale

$$C_T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{x_{\leq}}{2c_0^2} \int_0^{\infty} C_\varepsilon(\boldsymbol{\rho}, \zeta) d\zeta, \quad (2.19)$$

avec $x_{\leq} = \min\{x_1, x_2\}$ est le plus petit des x_1 et x_2 . La relation entre la fonction de covariance C_ε et le coefficient de diffraction R_ε est donnée en Annexe A3. Comme on a supposé que le champ turbulent thermique est isotrope (voir la définition en Annexe A3), la fonction de covariance des temps est également isotrope et on obtient

$$C_T(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{x_{<}}{2c_0^2} \int_0^\infty C_\varepsilon(\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}) d\zeta = \frac{x_{<}\sigma_\varepsilon^2}{2c_0^2} \int_0^\infty R_\varepsilon(\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}) d\zeta. \quad (2.20)$$

Dans les deux sous parties suivantes, la variance et les fonctions de corrélation spatiales des temps de vol vont être calculées à partir de cette dernière expression analytique (2.20) de la covariance spatiale des temps.

2.2.2.1 Variance des temps de vol

Nous pouvons extraire la variance des temps de vol à partir de la fonction de covariance (2.20) lorsque les deux points \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 sont identiques, alors $\mathbf{p} = 0$ et $x_1 = |\mathbf{x}_1| = x_2 = |\mathbf{x}_2| = x$, la variance de temps de vol est obtenue par l'équation (2.20)

$$\langle T_1^2(\mathbf{x}) \rangle = \frac{x\sigma_\varepsilon^2}{2c_0^2} \int_0^\infty R_\varepsilon(\zeta) d\zeta. \quad (2.21)$$

Pour un coefficient de corrélation $R_\varepsilon(\zeta)$ (voir l'équation A.3.8) de forme gaussienne défini par l'équation (1.48), son intégrale dans le domaine $\zeta \in [0, +\infty[$ donne la longueur d'intégration effective qui est liée à la longueur caractéristique du milieu l_ε

$$l_{\text{eff}} = \int_0^\infty R_\varepsilon(\zeta) d\zeta = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\zeta^2}{l_\varepsilon^2}\right) d\zeta = \frac{l_\varepsilon \sqrt{\pi}}{2}. \quad (2.22)$$

Avec l'approximation des temps de vol au premier ordre en puissance de ε , la variance de temps de vol obtenue à partir de l'équation (2.21) est proportionnelle à la distance de propagation x :

$$\sigma_{T_1}^2 \approx \langle T_1^2(\mathbf{x}) \rangle = \frac{\sqrt{\pi}\sigma_\varepsilon^2 l_\varepsilon}{4c_0^2} x, \quad (2.23)$$

mais ce résultat n'est plus valable lorsque la distance de propagation dépasse une certaine limite. Selon Kulkarny [59], cette distance limite est reliée à la distance d'apparition des caustiques, et le domaine de validité de la relation (2.23) est donné par

$$x \ll a l_\varepsilon \sigma_\varepsilon^{-2/3}, \quad (2.24)$$

où a est un facteur constant.

Pour que la prédiction de la variance des temps de vol soit valide au-delà du domaine de validité donné par l'équation (2.24), Iooss [42] a calculé la variance des temps de vol du second ordre $\sigma_{T_2}^2$ pour une onde incidente plane

$$\sigma_{T_2}^2 = \langle T_2^2 \rangle - \langle T_2 \rangle^2 = \frac{x^4}{32c_0^2} \frac{\sigma_\varepsilon^4}{l_\varepsilon^2} \left[\int_0^\infty \frac{R'(x')}{x'} dx' \right]^2. \quad (2.25)$$

Pour un coefficient de corrélation de forme gaussienne, l'intégrale dans la formule précédente (2.25) est remplacée par le résultat de son calcul fourni en (2.11) et nous obtenons

$$\sigma_{T_2}^2 = \langle T_2^2 \rangle - \langle T_2 \rangle^2 = \frac{\pi\sigma_\varepsilon^4}{32c_0^2} \frac{x^4}{l_\varepsilon^2}. \quad (2.26)$$

Avec l'approximation à l'ordre deux en puissances de ε , la variance des temps de vol, pour une onde incidente plane, varie non linéairement avec la distance de propagation :

$$\sigma_T^2(x) = \sigma_{T_1}^2 + \sigma_{T_2}^2 = \frac{\sqrt{\pi}\sigma_\varepsilon^2 l_\varepsilon}{4c_0^2} x + \frac{\pi\sigma_\varepsilon^4}{32c_0^2 l_\varepsilon^2} x^4. \quad (2.27)$$

Cette non linéarité a été observée par nombreux auteurs, notamment par les simulations numériques de Karweit *et al.* 8 avec l'approximation d'Helmholtz, la méthode de rayons et l'approximation parabolique, et par Fiorina [23] avec la méthode de sommation de faisceaux gaussiens. Nous avons également validé ce résultat par comparaison avec les résultats issus de la méthode de rayons. Afin de se placer dans notre cas d'étude, nous avons choisi une longueur caractéristique $l_\varepsilon = 100\text{mm}$; la fluctuation maximale de température est $\Delta T = 50^\circ\text{C}$ et la valeur moyenne de 200°C , ce qui correspond à un écart-type $\sigma_\varepsilon = 0.0018$. Dans le cas d'une onde plane se propageant dans le champ turbulent thermique gaussien correspondant et les temps de vol ont été calculés pour une distance de propagation $x = 5\text{ m}$. Les résultats sont présentés dans la Figure 2-4.

Nous pouvons observer de très bons accords entre les résultats issus de la méthode de rayons et les résultats de la solution analytique au second ordre, la solution analytique au premier ordre n'étant plus valide lorsque $x/l_\varepsilon > 25$ (soit $x > 2,5\text{ m}$ pour $l_\varepsilon = 100\text{ mm}$). Dans l'application de la télémétrie, la distance de propagation est d'environ 2 m , ce qui est proche de la limite de validité du résultat donné par (2.24). Dans le but de vouloir traiter de grandes distances de propagation, nous choisissons donc l'approximation d'ordre deux de la variance définie par la formule (2.27), qui sera l'une des entrées principales de la simulation stochastique des temps de vol que nous allons développer au §2.3.

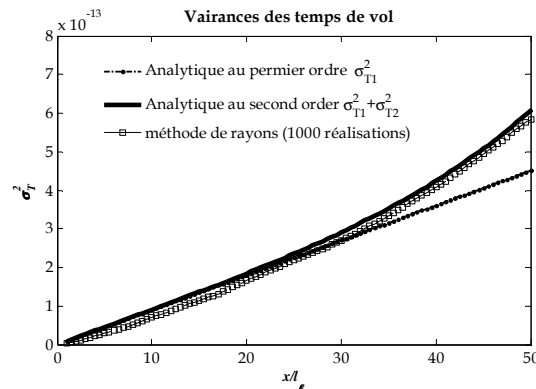


Figure 2-4: Comparaison des résultats de la variance des temps de vol en fonction de la distance de propagation, normalisée par la longueur caractéristique.

La covariance calculée sur un seul point nous donne accès à la variance des temps de vol qui est une grandeur très importante pour l'analyse des incertitudes de temps de vol en fonction des propriétés du milieu et la distance de propagation. La prise en compte de cette variance dans la simulation stochastique nous permet alors de reproduire des fluctuations de temps avec des niveaux corrects.

2.2.2.2 Corrélation spatiale de phase

La fonction de corrélation spatiale de phase est une fonction indispensable pour la construction de l'aberration aléatoire de phase : elle décrit en effet la continuité (ou la cohérence) spatiale de phase entre deux points du champ de propagation. Cette fonction peut être extraite à partir de la fonction de covariance que nous avons étudiée au §2.1. Etudions maintenant dans un champ turbulent thermique isotrope les corrélations spatiales des phases d'une onde plane à partir de l'expression de la fonction de covariance fournie par l'équation (2.20). Dans un premier temps, nous allons calculer la corrélation transversale des phases qui décrit la continuité de phase mesurée dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation entre deux rayons voisins ; on se situe donc dans un plan \mathbf{x}_\perp (voir la définition en §2.2) pour une distance donnée $x_1 = x_2 = x$. L'équation (2.20) devient alors en fonction de ρ

$$C_{T_{\perp}}(\rho, x) = \frac{x}{2c_0^2} \int_0^{\infty} C_{\varepsilon}(\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}) d\zeta, \quad (2.28)$$

où $C_{\varepsilon}(\sqrt{\rho^2 + \zeta^2})$ est une fonction gaussienne. Afin de simplifier l'intégrale, nous pouvons faire la décomposition suivante :

$$C_{\varepsilon}(\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}) = e^{-(\rho^2 + \zeta^2)/l_{\varepsilon}^2} = e^{-\rho^2/l_{\varepsilon}^2} \cdot e^{-\zeta^2/l_{\varepsilon}^2} = C_{\varepsilon}(\rho) \cdot C_{\varepsilon}(\zeta). \quad (2.29)$$

L'équation (2.28) devient donc

$$C_{T_{\perp}}(\rho) = R_{\varepsilon}(\rho) \frac{\sigma_{\varepsilon}^2 x}{2c_0^2} \int_0^{\infty} R_{\varepsilon}(\zeta) d\zeta, \quad (2.30)$$

où

$$\frac{\sigma_{\varepsilon}^2 x}{2c_0^2} \int_0^{\infty} R_{\varepsilon}(\zeta) d\zeta = \langle T_1^2(x) \rangle. \quad (2.31)$$

La corrélation transversale des phases est donnée sous la forme du produit de la variance des temps de vol et du coefficient de corrélation du milieu de propagation

$$C_{T_{\perp}}(\rho) = \langle T_1^2(x) \rangle R_{\varepsilon}(\rho), \quad (2.32)$$

où la variance des temps de vol utilisée ici est une approximation d'ordre 1 en ε , donnée par l'équation (2.23). Remarquons que, pour une onde plane, le coefficient de corrélation transversale des temps de vol est identique au coefficient de corrélation du milieu de propagation. La longueur caractéristique transversale l_{\perp} du champ des fluctuations de temps $T'(x)$ est donc équivalente à la longueur caractéristique du milieu : $l_{\perp} = l_{\varepsilon}$. En appliquant la méthode de rayons, nous avons pu estimer le coefficient de corrélation d'une onde plane en fonction de ρ pour différentes distances de propagation x à partir de nombreuses réalisations aléatoires de cartographie de vitesse. En Figure 2-5, on compare les coefficients de corrélation calculés en utilisant la méthode de rayons avec la solution analytique donnée par l'équation (2.32) (la fonction est symétrique par rapport à $\rho = 0$).

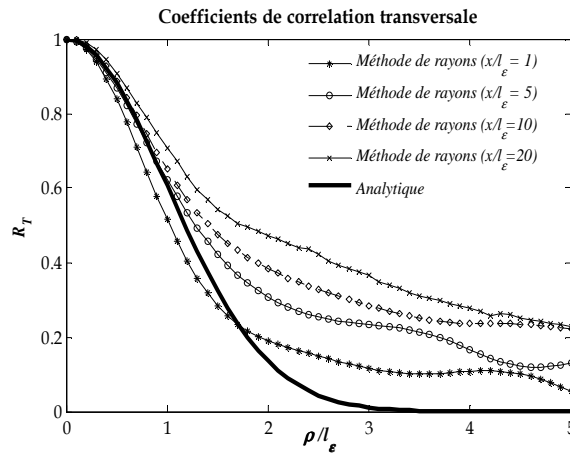


Figure 2-5: Comparaison des coefficients de corrélation transversaux obtenus de manière analytique et ceux calculés par la méthode de rayons pour différentes distances de propagation.

On constate des bons accords des résultats lorsque la distance entre le point de référence et le point de mesure est petite : $\rho/l_{\varepsilon} < 1,5$. En dehors de cette plage, les différences observées par rapport à la solution analytique sont essentiellement issues des erreurs de

l'estimation du coefficient de corrélation à partir d'un nombre des résultats limités fournis par la méthode de rayons, ces erreurs augmentant avec la distance de propagation x/l_ϵ .

On s'intéresse ensuite à la corrélation longitudinale des phases qui quantifie la continuité spatiale de phase le long de la direction de propagation. On situe donc les deux points considérés x_1 et x_2 distincts (avec $x_1 \neq x_2$) sur une ligne parallèle à la direction de propagation. En utilisant l'équation (2.20) avec $\rho = r_{\perp 2} - r_{\perp 1} = 0$, on obtient alors

$$C_{T_{\parallel}}(x_1, x_2) = \frac{x_{<} \sigma_\epsilon^2}{2c_0^2} \int_0^\infty R_\epsilon(\zeta) d\zeta = \frac{\sigma_\epsilon^2 l_\epsilon \sqrt{\pi}}{4c_0^2} x_{<}. \quad (2.33)$$

La corrélation longitudinale des phases ne dépend donc que de $x_{<}$, c'est-à-dire la plus petite des cordonnées entre x_1 et x_2 . Le coefficient de corrélation peut être calculé par

$$R_{T_{\parallel}}(x_1, x_2) = \frac{C_{T_{\parallel}}(x_1, x_2)}{\sigma_{T_1}(x_1) \sigma_{T_1}(x_2)} = \frac{x_{<}}{\sqrt{x_1 x_2}} = \sqrt{\frac{x_{<}}{x_{>}}} = \begin{cases} \sqrt{x_2/x_1} & \text{pour } x_2 < x_1 \\ \sqrt{x_1/x_2} & \text{pour } x_2 > x_1 \end{cases}. \quad (2.34)$$

où $x_{>}$ représente le maximum entre x_1 et x_2 . Le coefficient de corrélation du milieu de propagation n'est plus conservé dans la fonction de corrélation longitudinale des phases. Pour un point de référence donné, x_1 par exemple, le coefficient de corrélation longitudinale $R_{T_{\parallel}}(x_1, x_2)$ est tracé en fonction de x_2 en Figure 2-6. Nous pouvons remarquer que cette fonction n'est pas symétrique par rapport au point de référence x_0 (pour lequel $x_2 = x_1$) contrairement à celle de corrélation transversale, car les fluctuations des temps de vol le long de la direction de propagation ne sont pas homogènes, les variances augmentant avec la distance de propagation d'après la loi définie par (2.27). En aval du point de référence x_0 , R_{\parallel} décroît plus lentement avec la distance que la fonction gaussienne de corrélation transversale donnée en (2.32) ; la distance de corrélation longitudinale l_{\parallel} est donc plus grande que celle transversale l_{\perp} . Selon Rytov [17], la distance de corrélation longitudinale est du même ordre que la distance de propagation : $l_{\parallel} \approx x$.

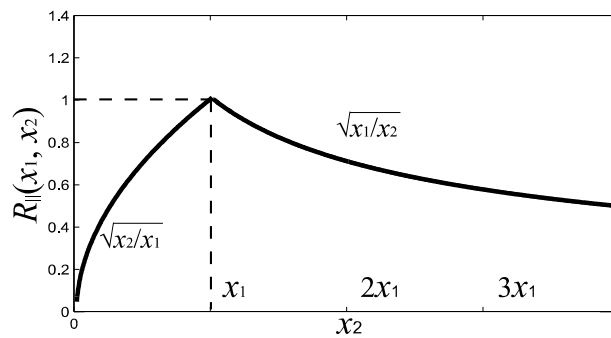


Figure 2-6: Coefficient de corrélation longitudinale des phases

Nous avons constaté que la fonction corrélation des temps de vol n'est pas isotrope dans toutes les directions : le coefficient de corrélation dans un plan transversal à la direction de propagation est identique à celui du champ de célérité, mais le coefficient de corrélation selon la direction de propagation n'est pas symétrique par rapport au point de référence. Les distances de corrélation selon les deux directions ne sont donc pas identiques.

Nous avons présenté, dans cette partie, les expressions analytiques des moments statistiques des temps de vol en utilisant la méthode de perturbation. Cette étude nous permet à la fois de comprendre les comportements statistiques des temps de vol lors de la propagation dans un milieu aléatoire et de disposer d'expressions simples des entrées du modèle stochastique que nous allons développer dans la partie suivante.

2.3 SIMULATION STOCHASTIQUE DES TEMPS DE VOL D'UNE ONDE PLANE

Nous allons présenter dans cette partie le développement du modèle stochastique de propagation en milieu aléatoire. La stratégie qu'on adopte est de considérer que le champ de propagation en milieu aléatoire est la combinaison du champ de propagation en milieu homogène moyenné et d'une correction aléatoire qui correspond à l'influence des fluctuations de vitesse (voir la Figure 2-1). Un modèle de propagation en milieu homogène basé sur la théorie des rayons (modèle de pinceaux) existe déjà dans le logiciel CIVA et nous allons développer le modèle qui permet de générer la partie de corrections aléatoires : l'aberration aléatoire de phase. Comme nous l'avons signalé au chapitre 1 (voir Figure 1-21), la variation d'amplitude est très faible dans notre cas d'étude ; nous travaillons donc uniquement sur la variation des temps de vol. Nous allons appliquer la méthode de représentation spectrale proposée par Shinozuka [52], qui est une méthode simple à mettre en œuvre, efficace en temps de calcul et convergeant rapidement. Nous présentons tout d'abord le principe et les développements théoriques de cette méthode ; cette méthode est ensuite appliquée au calcul d'un champ aléatoire représentant la partie fluctuante des temps de propagation d'une onde acoustique en milieu aléatoire.

Les fluctuations des temps de vol sont calculées dans un premier temps dans un plan perpendiculaire à la direction de propagation pour une distance donnée. Dans ce calcul, on ne prend en compte que la fonction de corrélation transversale du temps (donnée par l'équation (2.32)) comme entrée du modèle. Une analyse d'erreur est effectuée afin d'optimiser le choix des paramètres du modèle stochastique. Ensuite une forme approchée de la fonction de corrélation spatiale tridimensionnelle est développée en combinant les fonctions de corrélation transversale et longitudinale (donnée par l'équation (2.33)). En important cette fonction de corrélation tridimensionnelle dans notre modèle stochastique, nous pouvons calculer les fluctuations des temps de vol dans un espace 3D.

2.3.1 Méthode de représentation spectrale

La partie essentielle du modèle stochastique est l'aberration aléatoire de phase qui fournit les fluctuations spatiales des temps de vol. Cette aberration aléatoire de phase est fondée sur la méthode de représentation spectrale [52]. Nous allons présenter ici le principe de cette méthode pour un cas général : génération d'un champ multidimensionnel.

Soit un champ aléatoire multidimensionnel $Z(\mathbf{x})$ avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (par exemple : bidimensionnel, $n=2$ comme dans §2.3.2, tridimensionnel $n=3$ comme dans §2.3.4) de moyenne nulle et dont les éléments sont des valeurs réelles. La fonction de corrélation $C_z(\boldsymbol{\rho})$ du champ $Z(\mathbf{x})$ est donnée par :

$$C_z(\boldsymbol{\rho}) = \langle Z(\mathbf{x}_1)Z(\mathbf{x}_2) \rangle, \quad (2.35)$$

où \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 sont deux points distincts, $\boldsymbol{\rho}$ est le vecteur reliant ces deux points : $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$. Nous pouvons représenter ce champ aléatoire dans le domaine fréquentiel via sa densité spectrale de puissance calculée à partir de la transformée de Fourier de sa fonction de corrélation (théorème de Wiener-Khintchine) :

$$S(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} C_z(\boldsymbol{\rho}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}) d\boldsymbol{\rho}, \quad (2.36)$$

où \mathbf{k} représente le vecteur d'onde. La densité spectrale de puissance représente la distribution d'énergie du champ aléatoire dans le domaine des vecteurs d'onde \mathbf{k} . La méthode de représentation spectrale consiste à générer le champ aléatoire

multidimensionnel $Z(\mathbf{x})$ sous la forme d'une superposition de N harmoniques qui ont des phases φ et vecteurs d'onde \mathbf{k} aléatoires,

$$Z(\mathbf{x}) = \sqrt{2} \sum_{j=1}^N A_j \cos(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x} + \varphi_j), \quad (2.37)$$

chaque harmonique représentant une onde plane dans l'espace \mathbf{x} , appelé mode Fourier, dont l'amplitude A_j du mode j est donnée par

$$A_j(\mathbf{k}_j) = [S(\mathbf{k}_j) \Delta \mathbf{k}]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.38)$$

Le pas $\Delta \mathbf{k}$ du vecteur d'onde \mathbf{k} est défini à l'aide de l'intervalle effectif de la densité spectrale de puissance $S(\mathbf{k})$ c'est-à-dire l'intervalle pour lequel $S(\mathbf{k}) \neq 0$. Cet intervalle nous permet de fixer les valeurs maximum \mathbf{k}_u et minimum \mathbf{k}_l , soit

$$-\infty < \mathbf{k}_l \leq \mathbf{k}_j \leq \mathbf{k}_u < \infty. \quad (2.39)$$

Si on choisit de définir les vecteurs d'onde comme une distribution linéaire dans l'intervalle défini, l'incrément du vecteur d'onde $\Delta \mathbf{k}$ peut être fixé à partir du nombre total des modes N :

$$\Delta \mathbf{k} = \frac{\mathbf{k}_u - \mathbf{k}_l}{N}. \quad (2.40)$$

L'orientation de chaque mode, définie par le vecteur d'onde \mathbf{k} , est aléatoirement distribuée dans l'espace \mathbf{x} . La phase φ_j de chaque mode est issue d'un tirage aléatoire dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. Nous allons appliquer cette méthode de représentation spectrale (formule (2.37)) dans la suite pour simuler les fluctuations de temps de vol. Les calculs des densités spectrales de puissance des fluctuations de temps seront également détaillés et obtenus à l'aide des fonctions de corrélation de temps calculées au §2.1.

2.3.2 Calculs d'un champ isotrope des fluctuations des temps de vol

En utilisant la formule (2.37), on va calculer dans un premier temps les fluctuations des temps de vol dans un espace où elles sont isotropes. Considérons un espace tridimensionnel $\mathbf{x}(x, \mathbf{r})$, une onde plane se propageant selon la direction x , et disposons un écran $\{x = X, \mathbf{r}\}$ perpendiculaire à la direction de propagation. Les temps de vol mesurés sur cet écran, notés $T_x(\mathbf{r})$, forment un champ de temps de vol dont la partie fluctuante $T'_x(\mathbf{r})$ est donnée par :

$$T'_x(\mathbf{r}) = T_x(\mathbf{r}) - \langle T_x(\mathbf{r}) \rangle, \quad (2.41)$$

qui est un champ aléatoire isotrope dans le plan \mathbf{r} . Sa fonction de corrélation $C_{T_1}(\mathbf{p}) = \langle T'_x(\mathbf{r}') T'_x(\mathbf{r}'') \rangle$ avec $\mathbf{p} = \mathbf{r}'' - \mathbf{r}'$ est la fonction de corrélation transversale des temps de vol, donnée par l'équation (2.32). C'est un champ bidimensionnel car fonction de $\mathbf{r}(r_1, r_2)$; l'équation (2.37) devient alors

$$T'_x(\mathbf{r}) = \sqrt{2} \sum_{j=1}^N A_j \cos(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} + \varphi_j), \quad (2.42)$$

avec

$$A_j(\mathbf{k}_j) = \sqrt{S_T(\mathbf{k}_j) \Delta \mathbf{k}}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2.43)$$

où $S_T(\mathbf{\kappa}_j)$ est la densité spectrale de puissance du champ de la fluctuation des temps de vol $T'_x(\mathbf{r})$ qui est calculée à partir de la fonction de corrélation transversale $C_{T_\perp}(\mathbf{\rho})$ (donnée par l'équation (2.32)). Chaque fonction cosinus représente un mode de Fourier qui est une onde plane se propageant selon la direction du vecteur d'onde $\mathbf{\kappa}_j$, avec son amplitude A_j et sa phase à l'origine φ_j correspondantes (voir Figure 2-7).

L'orientation du vecteur d'onde $\mathbf{\kappa}_j$ est définie par son angle θ_j par rapport à l'axe $\overrightarrow{or_1}$. θ_j et φ_j sont choisis à l'aide de tirages aléatoires dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ de façon équiprobable (densité de probabilité uniforme). La projection du vecteur $\mathbf{\kappa}_j$ dans l'espace \mathbf{r} est donné par :

$$\mathbf{\kappa}_j \cdot \mathbf{r} = \kappa_{j1} r_1 + \kappa_{j2} r_2 = \kappa_j \cos(\theta_j) r_1 + \kappa_j \sin(\theta_j) r_2, \quad (2.44)$$

où $\kappa_j = |\mathbf{\kappa}_j|$ est le nombre d'onde.

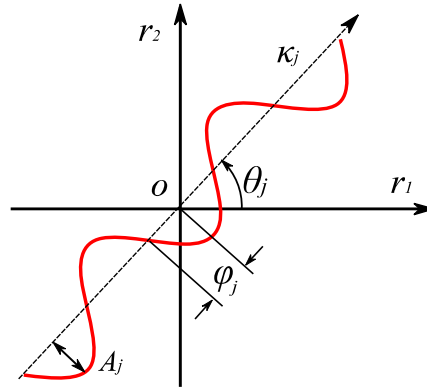


Figure 2-7: Représentation d'un mode de Fourier (onde plane) dans l'espace \mathbf{r} (r_1, r_2) par le biais d'une fonction cosinus ; chaque mode est caractérisé par son orientation θ_j par rapport l'axe $\overrightarrow{or_1}$, son amplitude A_j , ainsi que par sa phase à l'origine φ_j .

Pour calculer l'amplitude de chaque mode A_j , nous allons déterminer la densité spectrale de puissance $S_T(\mathbf{\kappa}_j)$ bidimensionnelle par application de la transformée de Fourier ; l'équation (2.34) devient alors :

$$S_T(\mathbf{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} C_{T_\perp}(\mathbf{\rho}) e^{-i\mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{\rho}} d\mathbf{\rho} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} C_{T_\perp}(\mathbf{\rho}) [\cos(\mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{\rho}) + i \sin(\mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{\rho})] d\mathbf{\rho}, \quad (2.45)$$

où la fonction de corrélation transversale $C_{T_\perp}(\mathbf{\rho})$, définie par l'équation (2.32), est une fonction gaussienne, donc symétrique :

$$C_{T_\perp}(\mathbf{\rho}) = C_{T_\perp}(-\mathbf{\rho}). \quad (2.46)$$

Comme la fonction sinus est une fonction impaire, on a donc :

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_{T_\perp}(\mathbf{\rho}) \sin(\mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{\rho}) d\mathbf{\rho} = 0. \quad (2.47)$$

La densité spectrale de puissance devient

$$S_T(\mathbf{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} C_{T_\perp}(\mathbf{\rho}) \cos(\mathbf{\kappa} \cdot \mathbf{\rho}) d\mathbf{\rho}, \quad (2.48)$$

où $S_T(\mathbf{\kappa}) = S_T(-\mathbf{\kappa})$. Sachant que le champ de la fluctuation des temps de vol $T'_X(\mathbf{r})$ est un champ isotrope, on a donc $S_T(\mathbf{\kappa}) = S_T(\kappa)$ avec $\kappa = |\mathbf{\kappa}|$, et $C_{T_\perp}(\boldsymbol{\rho}) = C_{T_\perp}(\rho)$ avec $\rho = |\boldsymbol{\rho}|$. La transformée de Fourier d'une courbe gaussienne est bien connue dans un espace à n dimensions et est donnée par :

$$S_T(\mathbf{\kappa}) = (2\pi)^{-n} \sigma_T^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\rho/l_\perp)^2} e^{-i\mathbf{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho}} d\boldsymbol{\rho} = \frac{\sigma_T^2 l_\perp^n}{2^n (\pi)^{n/2}} e^{-\frac{\kappa^2 l_\perp^2}{4}}, \quad (2.49)$$

où l_\perp est la longueur caractéristique transversale du champ des fluctuations de temps de vol ; elle est égale à la longueur caractéristique du milieu en raison de l'équation (2.32):

$$l_\perp = l_\epsilon. \quad (2.50)$$

Et dans le cas 2D, on a donc

$$S_T(\kappa) = \frac{\sigma_T^2 l_\epsilon^2}{4\pi} e^{-\frac{\kappa^2 l_\epsilon^2}{4}}, \quad (2.51)$$

qui est également une fonction gaussienne (voir Figure 2-8), avec un intervalle effectif : $[-5/l_\epsilon \leq \kappa \leq 5/l_\epsilon]$, où les valeurs ne sont pas nulles. Cet intervalle nous permet de fixer les bords du domaine des nombres d'onde : κ_l et κ_u . Pour un nombre de mode N donné, on a d'après l'équation (2.40)

$$\Delta\kappa = \frac{\kappa_u - \kappa_l}{N}. \quad (2.52)$$

Le domaine des nombres d'onde est donc donné par :

$$\kappa_j = \kappa_l + (j - \frac{1}{2})\Delta\kappa, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.53)$$

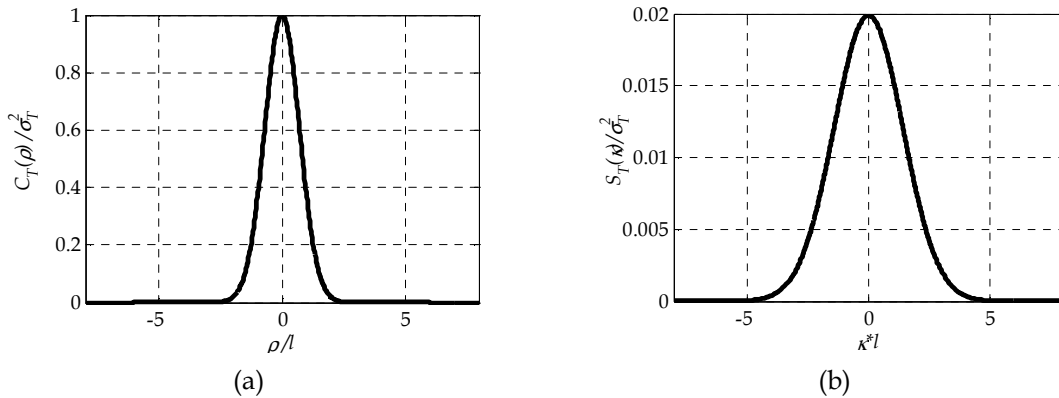


Figure 2-8 : (a) fonction de corrélation gaussienne normalisée ; (b) densité spectrale de puissance d'une fonction gaussienne qui est également une fonction gaussienne dont la zone effective est : $[-5/l_\epsilon \leq \kappa \leq 5/l_\epsilon]$.

Un exemple de calcul d'un champ isotrope de fluctuations de temps de vol $T'_X(\mathbf{r})$ à l'aide de la formule (2.42) est donné en Figure 2-9 pour une distance de propagation de 3 m dans un milieu sodium aléatoire dont la vitesse du son moyenne est de 2472 m/s et la variation maximale de vitesse est de l'ordre de 1%.

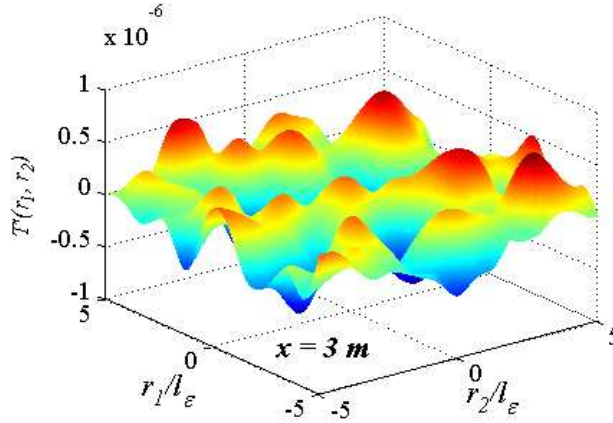


Figure 2-9: Réalisation d'un champ de fluctuation des temps de propagation d'une onde plane incidente dans un plan $\mathbf{r}(r_1, r_2)$ perpendiculaire à la direction de propagation x et situé à une distance de propagation fixée à $x = 3 \text{ m}$; la vitesse du son moyenne dans le milieu de propagation est de 2472 m/s avec une variation maximale de 1% qui correspond à un écart-type $\sigma_\varepsilon = 0.0018$.

Une variation maximale de temps de vol de l'ordre de $\pm 0.5 \times 10^{-7} \text{ (s)}$ a été obtenue. Sachant que la moyenne des temps de vol est de $3 \text{ (m)}/2472 \text{ (m/s)} = 0.0012 \text{ s}$, on relève une variation des temps de vol de 0.08% . Nous pouvons remarquer que la continuité spatiale des temps de vol est assurée avec cette technique, puisque la surface représentée ne présente pas de variations très rapides dans l'espace. Nous allons voir maintenant que la fonction de corrélation du champ obtenue doit être en cohérence avec la fonction de corrélation entrée $C_T(\rho)$, ce qui est aussi le critère pour juger du choix des paramètres, par exemple le nombre total de modes de Fourier N ou encore la discrétisation du nombre d'onde $\Delta\kappa$.

2.3.3 Paramétrisation du modèle

Un meilleur choix des paramètres du modèle, que sont le nombre de modes N et l'intervalle du nombre d'onde, nous permet d'avoir une aberration de phase plus efficace et précise. Pour cela, il faut d'abord connaître les sources d'erreur de la formule (2.42). Deux types d'erreurs majeurs sont introduits par l'utilisation de cette méthode de simulation stochastique. La première est issue de l'estimation des moments statistiques du champ aléatoire à générer qui sont les entrées du modèle. Dans notre cas d'étude, on suppose qu'une onde plane incidente se propage dans un milieu aléatoire gaussien dont la structure de corrélation est approchée par une fonction de corrélation analytique. Cette erreur est donc issue de cette approximation, et non de l'aberration aléatoire de phase elle-même. Par contre, le second type d'erreur est causé par la paramétrisation du modèle, c'est-à-dire le choix du nombre de modes N dans l'équation (2.42), qui va déterminer la taille de la discrétisation $\Delta\kappa$ pour un intervalle $[\kappa_l, \kappa_u]$ donné.

Afin d'étudier l'influence de ces paramètres $\Delta\kappa$, κ_l et κ_u sur la précision des résultats, nous pouvons comparer la fonction de corrélation simulée avec la fonction de corrélation en entrée. Selon Shinozuka et Jan [52], la fonction de corrélation simulée peut être calculée à partir de l'équation suivante

$$C(\rho) = \sum_{j=1}^N A^2(\kappa_j) \cos(\kappa_j \cdot \rho), \quad (2.54)$$

où $A^2(\kappa_n) = S_T(\kappa_n) \Delta\kappa$ [selon l'équation (2.43)]. Lorsque $N \rightarrow \infty$, on obtient :

$$C(\mathbf{\rho}) = \int_{-\infty}^{\infty} S_T(\mathbf{\kappa}) \cos(\mathbf{\kappa}_n \cdot \mathbf{\rho}) d\mathbf{\kappa} = C_T(\mathbf{\rho}), \quad (2.55)$$

qui est la transformée inverse de l'équation (2.48), et l'on obtient donc la fonction de corrélation en entrée $C_T(\mathbf{\rho})$. Nous allons tester dans un premier temps l'effet de la troncature κ_u dans le domaine des nombres d'onde. Pour cela on fait varier κ_u de $2/l_\varepsilon$ à $8/l_\varepsilon$ avec un pas $\Delta\kappa=0,16/l_\varepsilon$. Les fonctions de corrélation simulées $C(\rho)=C(\mathbf{\rho})$ sont représentées en fonction de l'écartement par rapport au point de référence où $\rho=|\mathbf{\rho}|=0$ et $C_T(\rho)=C_T(\mathbf{\rho})$ en Figure 2-10-a.

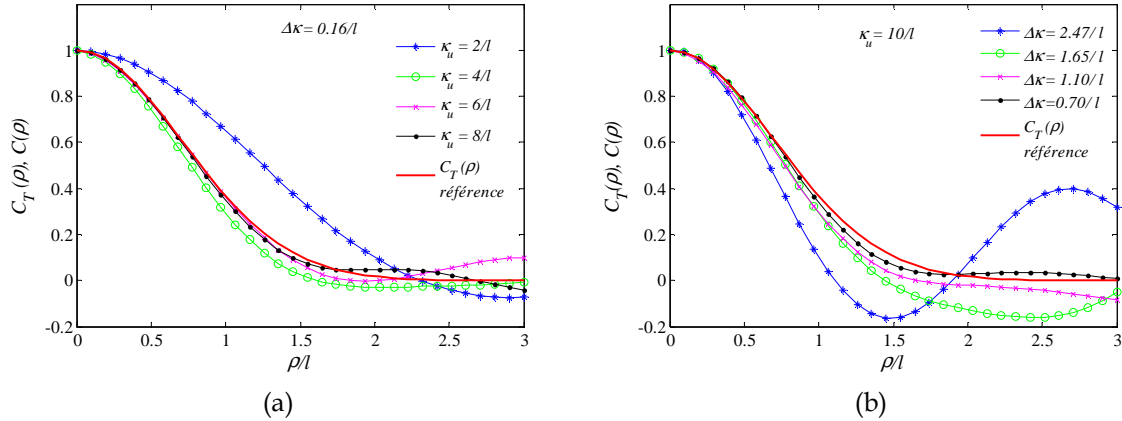


Figure 2-10: (a) effet de la troncature de nombre d'onde sur la précision des calculés avec l'équation (2.54) par comparaison avec la fonction de corrélation gaussienne théorique normalisée (courbe rouge). Le nombre d'onde maximal varie de $2/l_\varepsilon$ à $8/l_\varepsilon$ en fixant $\Delta\kappa=0,16/l_\varepsilon$. (b) effet de la taille d'incrément de nombre d'onde $\Delta\kappa$ sur la précision des résultats par comparaison avec la fonction de corrélation gaussienne théorique normalisée (courbe rouge).

Nous pouvons remarquer que les fonctions de corrélation simulées convergent vers la fonction de référence $C_T(\rho)$ lorsque $\kappa_u \geq 6/l_\varepsilon$. En effet, lorsque $\kappa_u \geq 6/l_\varepsilon$, la densité spectrale de puissance tend vers zéro (voir Figure 2-8-b), autrement dit, l'énergie du champ aléatoire est nulle en dehors de $\kappa_u = 6/l$. L'augmentation de κ_u ne peut plus augmenter la précision de la simulation car les modes construits par les nombres d'onde en dehors de cette plage ne contribuent pas à la sommation (2.54). Au final, par prudence, nous avons choisi une plage du nombre d'onde plus large :

$$-10/l_\varepsilon = \kappa_l < \kappa_n < \kappa_u = 10/l_\varepsilon. \quad (2.56)$$

Ensuite pour un intervalle donné $|\kappa| < 10/l_\varepsilon$, nous faisons varier $\Delta\kappa$ de $0.7/l_\varepsilon$ à $2.47/l_\varepsilon$, ce qui revient à faire varier le nombre de modes $N = 9, 13, 18, 30$ dans cet intervalle, afin de caractériser l'influence de N sur la précision des résultats. Les résultats donnés en Figure 2-10-b nous montrent que la fonction simulée avec l'équation (2.54) commence à converger vers la fonction exacte dès que $\Delta\kappa < 1,10/l_\varepsilon$, autrement dit $N > 18$ selon la relation (2.52). Après cette étude, nous avons décidé de choisir le pas le plus petit :

$$\Delta\kappa = 0,7/l_\varepsilon. \quad (2.57)$$

Les erreurs observées lors des deux analyses précédentes peuvent être représentées de façon analytique. Considérons un champ unidimensionnel et prenons la partie du spectre $S_T(\mathbf{\kappa})$ limitée aux fréquences positives $0 \leq \kappa \leq \kappa_u$; la simulation de sa fonction de corrélation positive devient alors

$$C(\rho) = \sum_{j=1}^N S_T(\kappa_j) \Delta \kappa \cos(\kappa_j \cdot \rho), \quad (2.58)$$

avec ici $N = \kappa_u / \Delta \kappa$ et la corrélation exacte est :

$$C_T(\rho) = \int_0^{\kappa_u} S_T(\kappa) \cos(\kappa \cdot \rho) d\kappa. \quad (2.59)$$

Shinozuka 52 a fait un développement de Taylor en puissance de $\Delta \kappa$ de l'équation (2.59) en négligeant les termes d'ordres supérieurs à 3 de $\Delta \kappa^n$ et a obtenu une formule approchée de cette dernière

$$C_T(\rho) = \sum_{j=1}^N S_T(\kappa_j) \Delta \kappa \cos(\kappa_j \rho) + \frac{(\Delta \kappa)^3}{24} \sum_{j=1}^N \frac{d^2}{d\kappa^2} [S_T(\kappa_j) \cos(\kappa_j \rho)], \quad (2.60)$$

dont le deuxième terme peut être approché par $\{(\Delta \kappa)^3 / 24\} \frac{d}{d\kappa} [S_T(\kappa_u) \cos(\kappa_u \rho)]$, car la somme des N éléments peut être considérée comme une intégrale éliminant une dérivée par rapport à κ . L'erreur de la fonction de corrélation simulée par rapport à celle exacte est donc :

$$C_T(\rho) - C(\rho) = \frac{\kappa_u^2}{24N^2} \left[\frac{dS_T(\kappa_u)}{d\kappa} \cos(\kappa_u \cdot \rho) - \rho S_T(\kappa_u) \sin(\kappa_u \cdot \rho) \right]. \quad (2.61)$$

La fonction de corrélation converge manifestement avec une vitesse de l'ordre de $1/N^2$ par rapport à la fonction de corrélation exacte.

Nous avons étudié les influences des différents paramètres (κ_u et $\Delta \kappa$) du modèle sur la précision du résultat stochastique en comparant la fonction de corrélation simulée $C(\rho)$ et la fonction de corrélation de référence $C_T(\rho)$. Les critères ont été ensuite fixés afin d'optimiser le modèle en terme de temps de calcul et de précision. Ces critères seront ensuite utilisés pour le modèle stochastique de propagation.

2.3.4 Calculs d'un champ anisotrope des fluctuations des temps de vol

Dans cette partie, la fonction de corrélation longitudinale, donnée par les équations (2.33) et (2.34) est incorporée dans notre modèle stochastique afin de calculer les fluctuations de temps dans tout l'espace. D'après le résultat (2.34), la structure de corrélation longitudinale des temps de vol n'est pas une forme gaussienne symétrique, contrairement à celle transversale. Pour un point de référence x_0 donné, la structure en amont ($x < x_0$) et la structure en aval ($x > x_0$) ne sont pas identiques (voir la Figure 2-6). La longueur caractéristique (ou la distance de corrélation) en amont est de l'ordre de x_0 ; mais cette distance est beaucoup plus grande que x_0 en aval, car le coefficient de corrélation $\sqrt{x_0/x}$ diminue beaucoup moins vite en aval, et la longueur caractéristique est la distance à partir de laquelle le coefficient de corrélation est inférieur à un certain niveau (par exemple pour la fonction de corrélation gaussienne, la longueur caractéristique correspond à un coefficient de corrélation égal à 0,368). La méthode de représentation spectrale ne permet pas de générer un champ aléatoire dont la fonction de corrélation n'est pas symétrique. C'est la raison pour laquelle cette fonction de corrélation longitudinale est ici approchée par une fonction gaussienne symétrique. On se place désormais dans un espace 3D $\mathbf{r}(r_1, r_2, r_3 = x)$, et on considère une onde se propageant vers les $r_3 = x$ croissants. La longueur caractéristique longitudinale du champ des fluctuations des temps est alors du même ordre que la distance de propagation $l_{\parallel} \approx r_3$, selon l'étude de Rytov *et al.* [17]. Cette dernière varie donc avec la distance de propagation du point de calcul. Mais dans l'exemple suivant (celui de la Figure

2-12), cette valeur est fixée en fonction de la distance de propagation moyenne, c'est-à-dire $r_{\max}/2 = 6/2 = 3 \text{ m} = 30 l_e$. l_{\parallel} sera donc approchée par la distance de propagation moyenne :

$$l_{\parallel} \simeq \langle r_3 \rangle. \quad (2.62)$$

La fonction de corrélation longitudinale est donnée par :

$$C_{T_{\parallel}}(h) = \sigma_T^2 e^{-\frac{h^2}{l_{\parallel}}}, \quad (2.63)$$

et nous permet de prendre en compte la corrélation de phase le long de la direction de propagation. Cette approximation utilisant une fonction gaussienne permet également de représenter la structure de corrélation du champ des fluctuations des temps de vol par une seule fonction gaussienne anisotrope, c'est-à-dire avec des longueurs de corrélation différentes selon la direction. Grâce à la propriété de la fonction gaussienne, sa densité spectrale de puissance devient également une fonction gaussienne anisotrope, ce qui facilite l'application de la méthode de représentation spectrale pour la simulation d'un champ anisotrope.

Nous considérons donc une fonction de corrélation anisotrope dont les variables sont séparables de la façon suivante :

$$C_T(\rho, h) = C_{T_{\perp}}(\rho) C_{T_{\parallel}}(h), \quad (2.64)$$

où $\rho = |\mathbf{r}_2(r_{21}, r_{22}) - \mathbf{r}_1(r_{11}, r_{12})|$ est toujours la distance entre deux points situés sur la surface du front d'onde et $h = |r_3 - r_{30}|$ est la distance dans la direction de propagation où $r_{30} = x_0$ est le point de référence. Pour une fonction gaussienne, l'équation (2.64) s'écrit :

$$C_T(\rho, h) = \sigma_T^2 e^{-\frac{\rho^2}{l_{\perp}}} e^{-\frac{h^2}{l_{\parallel}}}, \quad (2.65)$$

où les longueurs caractéristiques transversale et longitudinale du champ des fluctuations de temps sont déterminées par les équations (2.50) et (2.62) respectivement. La transformée de Fourier de cette dernière équation étant tout à fait séparable selon les deux variables, la densité spectrale de puissance est donc donnée par :

$$\begin{aligned} S_T(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} C_T(\rho, h) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\rho + h)} d\rho dh = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} C_{T_{\perp}}(\rho) e^{-i\mathbf{k} \cdot \rho} d\rho \int_{-\infty}^{\infty} C_{T_{\parallel}}(h) e^{-ikh} dh \\ &= \sigma_T^2 \frac{l_{\perp}^2}{4\pi} e^{-\frac{\kappa_{\perp}^2 l_{\perp}^2}{4}} \frac{l_{\parallel}}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\kappa_{\parallel}^2 l_{\parallel}^2}{4}} = \frac{\sigma_T^2 l_{\perp}^2 l_{\parallel}}{8(\pi)^{3/2}} e^{-\frac{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) l_{\perp}^2 + \kappa_3^2 l_{\parallel}^2}{4}}, \end{aligned} \quad (2.66)$$

où la projection du vecteur nombre d'onde dans l'espace 3D est donnée par

$$\kappa_1 = |\mathbf{k}| \cos \alpha \sin \beta, \quad \kappa_2 = |\mathbf{k}| \sin \alpha \sin \beta, \quad \kappa_3 = |\mathbf{k}| \cos \beta, \quad (2.67)$$

$\alpha \in [0, 2\pi[$ représentant l'angle d'azimut et $\beta \in [0, \pi]$ la déclinaison (voir Figure 2-11).

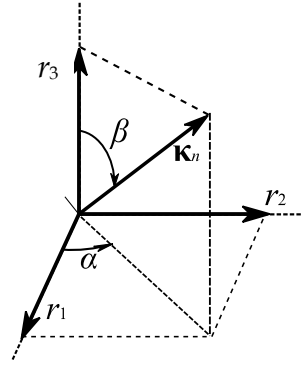


Figure 2-11: Projection du vecteur d'onde dans l'espace 3D

La densité spectrale de puissance (2.66) décrit la distribution d'énergie des fluctuations des temps dans l'espace des nombre d'ondes. Importer cette fonction dans le modèle stochastique nous permet de simuler les fluctuations des temps dans tout l'espace 3D ; la formulation du modèle stochastique 3D s'écrit donc :

$$T'(\mathbf{r}, x) = \sqrt{2} \sum_{j=1}^N A_j(\mathbf{\kappa}, x) \cos(\kappa_1 \cdot r_1 + \kappa_2 \cdot r_2 + \kappa_3 \cdot r_3 + \varphi_n), \quad (2.68)$$

où

$$A_j(\mathbf{\kappa}, x) = \sigma_T^2(x) \frac{l_{\perp}^2 l_{\parallel}}{8(\pi)^{3/2}} e^{-\frac{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) l_{\perp}^2 + \kappa_3^2 l_{\parallel}^2}{4}}, \quad (2.69)$$

et où la variance des temps de vol varie avec la distance de propagation x et est donnée par l'équation (2.27).

Reprenons l'exemple du chapitre 1 : une onde plane incidente se propage dans un milieu aléatoire dont la variation de vitesse de l'ordre de 1% ($\sigma_\varepsilon = 0,0018$) et dont la longueur caractéristique est $l_\varepsilon = 0,1\text{m}$. Nous obtenons en Figure 2-12 le même niveau de fluctuations que celui calculé par la méthode de rayons (voir Figure 1-19), c'est-à-dire de l'ordre de $\pm 0,5 \mu\text{s}$ et nous constatons également que les fluctuations augmentent avec la distance de propagation.

On dispose six écrans perpendiculaires à la direction de propagation avec des distances différentes ($x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \text{ m}$), sur lesquels les fluctuations sont représentées, ce qui permet de visualiser la continuité de phase dans ces deux directions perpendiculaires. Sur chaque écran, la continuité transversale des fluctuations est remarquée, puisque les fluctuations de temps de vol observées sont continues. La continuité longitudinale de phase peut être observée en regardant l'ensemble des résultats pour différentes distances x . En passant d'une distance x à l'autre, les profils des fluctuations de temps ont en effet une certaine ressemblance due à une continuité longitudinale de phase.

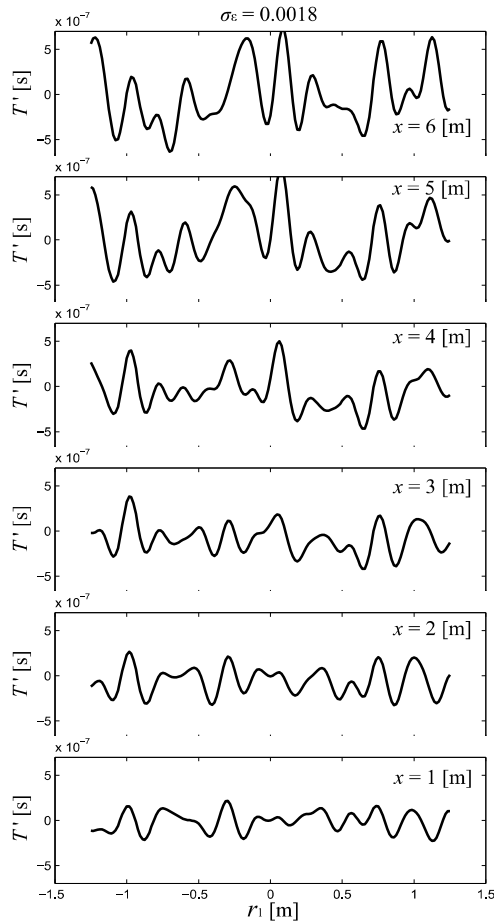


Figure 2-12: : Fluctuations des temps de vol des rayons issus d'une onde plane incidente qui se propage le long de la direction x dans un milieu dont longueur caractéristique est 100mm et l'écart-type de ϵ est $\sigma_\epsilon = 0.0018$ qui correspond à une variation maximale de température de 50°C; elles sont mesurées sur des écrans positionnés aux différentes distances ($x=1, 2, 3, 4, 5, 6$ m) de la source ($x=0$) et perpendiculaires à la direction de propagation.

Nous avons développé dans cette partie un modèle stochastique 3D pour calculer les fluctuations de temps de vol dans tout l'espace. Les fonctions de corrélation transversale et longitudinale ont été prises en compte dans le modèle afin d'assurer la continuité spatiale des fluctuations. Nous avons appliqué ce modèle dans le cas d'une onde plane, les fluctuations de temps de vol obtenues sont cohérentes avec celles calculées dans le chapitre 1 avec le modèle déterministe.

2.4 SIMULATION STOCHASTIQUE D'UN FAISCEAU ACOUSTIQUE EN MILIEU ALEATOIRE

La propagation d'un faisceau réaliste dans un milieu turbulent a été modélisée précédemment par l'application de la méthode de rayons au §1.3.3. Il s'agit de calculer dans l'espace le champ du faisceau issu du rayonnement de la surface du transducteur en traçant les trajets acoustiques qui relient les points de la surface de transducteur et les points de calcul. Comme l'influence de l'inhomogénéité aléatoire du milieu sur l'amplitude est très faible (voir Figure 1-21), l'amplitude associée à chaque trajet est donc modélisée par celle obtenue en milieu homogène moyenné. Dans le modèle stochastique, nous ne prenons donc en compte que la variation de temps de vol due à l'inhomogénéité du milieu, associé à chaque trajet. Le temps de vol calculé par la méthode de rayons a été introduit dans la formule de l'intégrale de Rayleigh-Sommerfeld afin de calculer la réponse impulsionnelle au point de calcul, mais cette méthode est très coûteuse en temps de calcul. Par exemple, si la surface du transducteur est discrétisée en 100 éléments, on a alors 100 rayons à calculer pour un seul point de calcul et le calcul d'un rayon est effectué par un schéma numérique itératif (par exemple : algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4) dont le coût de calcul est proportionnel au rapport distance/longueur d'onde. Dans notre cas d'étude, la longueur d'onde du signal

est de l'ordre de 1 mm, la distance de propagation est de l'ordre de 1000 mm et le temps de calcul est de l'ordre de 2 heures pour une zone de calcul de champ de 2500 points couvrant des distances avec la surface de source de 100 mm à 1400 mm.

Pour simuler avec un temps de calcul raisonnable un faisceau réaliste en milieu aléatoire, nous allons donc coupler le modèle de propagation en milieu homogène et le modèle de simulation stochastique qui fournit des fluctuations aléatoires de temps de vol (voir Figure 2-6). Ces fluctuations aléatoires de temps de vol représentent les perturbations du champ de propagation par les fluctuations de vitesse. Nous allons d'abord tester la performance de ce modèle stochastique pour un seul point de calcul par comparaison avec les résultats issus de la méthode de rayons. Nous allons ensuite calculer le champ de propagation dans une zone 2D à l'aide de la prise en compte de la continuité spatiale d'amplitude entre deux points de calcul.

2.4.1 Réponse impulsionnelle du champ rayonné en un point d'observation

Au chapitre 1, l'influence de la variation aléatoire des temps de vol sur la réponse impulsionnelle en un point d'observation a été étudiée par la méthode de rayons. Dans cette partie, nous allons renouveler cette étude en utilisant la modélisation stochastique. On calcule tout d'abord les tracés de rayons entre la surface du transducteur et le point de calcul en milieu homogène (dont la vitesse du son est la valeur moyenne du champ de vitesse turbulent) par l'utilisation de l'acoustique géométrique ; les tracés de rayons (l_1, l_2, \dots, l_n) sont illustrés en Figure 2-13 (lignes pointillées) ; chaque rayon est associé à un temps de vol T_n . Une partie fluctuante de temps de vol T'_n fournie par l'aberration aléatoire de phase en adaptant la formule (2.42) est ensuite ajoutée au temps T_n . Sachant que la formule (2.42) est validée pour le cas d'une onde plane, certaines approximations doivent être prises en compte afin de l'adapter au cas d'application, c'est-à-dire au faisceau réaliste généré par un transducteur.

Selon le principe de réciprocité, le champ reçu au point \mathbf{x} et émis par la surface du transducteur est égal au champ reçu par la surface du transducteur et émis par le point \mathbf{x} ; nous pouvons considérer le point de calcul (noté \mathbf{x} en Figure 2-13) comme un point source qui émet des rayons vers la surface du transducteur (les rayons se propagent donc en sens inverse). Le point de calcul se comporte alors comme une source ponctuelle. En revanche, lorsque la surface du transducteur est loin du point de calcul, nous pouvons faire l'approximation que l'onde générée sur la surface du transducteur est une onde plane. Quand le point de calcul est proche de la surface, la correction de temps de vol est négligeable et l'erreur induite par cette précédente hypothèse n'est donc pas très importante. Dans la formule (2.42), les coordonnées \mathbf{r} ont été définies comme les coordonnées d'une surface perpendiculaire à la direction de propagation d'une onde plane. Dans notre cas, les points de calcul sont principalement situés dans le champ effectif du transducteur et sont donc autour de l'axe principal du transducteur. S'ils sont loin de cette zone insonifiée du transducteur, nous pouvons considérer que la surface du transducteur est perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde plane supposée émise par le point de calcul. La surface du transducteur peut donc être prise comme la surface transversale perpendiculaire à la direction de propagation et les coordonnées \mathbf{r} sont définies comme les coordonnées des points $\mathbf{s}(s_1, s_2)$. Les variations de temps de vol associées à chaque rayon sont notées $T'(\mathbf{s}_1), T'(\mathbf{s}_2), \dots, T'(\mathbf{s}_n)$.

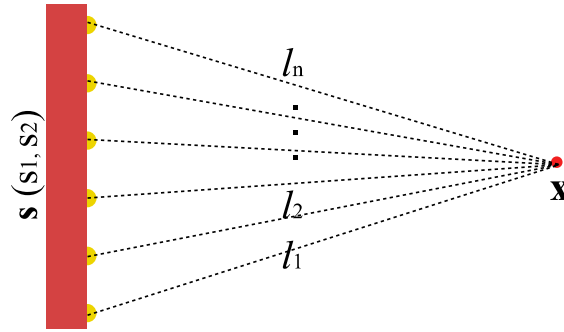


Figure 2-13 : Tracés de rayons (l_1, l_2, \dots, l_n) entre une surface et un point de calcul.

D'après les approximations précédentes, nous pouvons réécrire la formule (2.42) sous la forme suivante :

$$T'(\mathbf{s}_n) = \sqrt{2} \sum_{j=1}^N A_j(\mathbf{k}_j, |\mathbf{s}_n - \mathbf{x}|) \cos(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{s}_n + \varphi_j), \quad (2.70)$$

où \mathbf{x} est la coordonnée du point de calcul et les différentes distances $|\mathbf{s}_n - \mathbf{x}|$ entre le point de calcul \mathbf{x} et les points sur la surface du transducteur \mathbf{s}_n doivent être prise en compte dans le calcul des amplitudes A_j du mode j , puisque la variance de temps σ_T^2 contenue dans A_j augmente avec la distance de propagation de façon exponentielle.

Pour valider la formule approchée (2.70), nous allons calculer la réponse impulsionnelle en un point en modifiant les retards des signaux de champ en milieu homogène ; et nous comparons le résultat calculé avec les modifications de retards fournies par l'aberration aléatoire de phase [voir l'équation (2.70)] avec les résultats calculés avec les retards calculés par le modèle déterministe [tracé de rayons avec les équations (1.40) et (1.42)] et par un bruit blanc. Un bruit blanc est le résultat d'un tirage complètement aléatoire. Avec la simulation déterministe, l'entrée est une cartographie de vitesse donnée, et la perturbation de temps de vol est fortement liée à l'interaction entre la propagation d'onde et les inhomogénéités du milieu situées sur les trajets acoustiques. Mais avec la simulation stochastique, l'entrée du modèle n'est plus une cartographie de vitesse connue, mais les moments statistiques du milieu. L'entrée du bruit blanc issu d'un tirage aléatoire est simplement la variance des temps de vol pour une distance de propagation donnée. Dans un milieu turbulent sodium liquide dont la variation de température maximale est de l'ordre de 50°C et la longueur caractéristique est de 0,1 m, nous plaçons un transducteur plan circulaire de diamètre 0,03 m et un point de calcul sur l'axe de ce dernier à une distance de 3 m du transducteur. Pour le signal d'excitation du transducteur, nous choisissons une impulsion gaussienne de fréquence centrale $F_c = 1$ MHz et de largeur de bande 60%. Avec le modèle de rayons, on calcule les tracés de rayons à partir du point de calcul en lançant 180 rayons (l_1, l_2, \dots, l_{180}) vers la surface du transducteur et on relève les différences de temps de vol $T'(l_n)$ entre les résultats calculés en milieu inhomogène et les résultats en milieu homogène moyenné. Avec le modèle stochastique, on applique directement la formule de l'aberration de phase (2.70) pour obtenir un champ de variation de temps $T'(l_n)$. Le tirage aléatoire d'un bruit blanc nous fournit une série de valeurs de temps aléatoires sans prise en compte de la continuité spatiale de temps de vol. On compare dans la Figure 2-14 les variations de temps de vol obtenues avec les trois modèles précédents en fonction du numéro l_n des rayons atteignant le point de calcul.

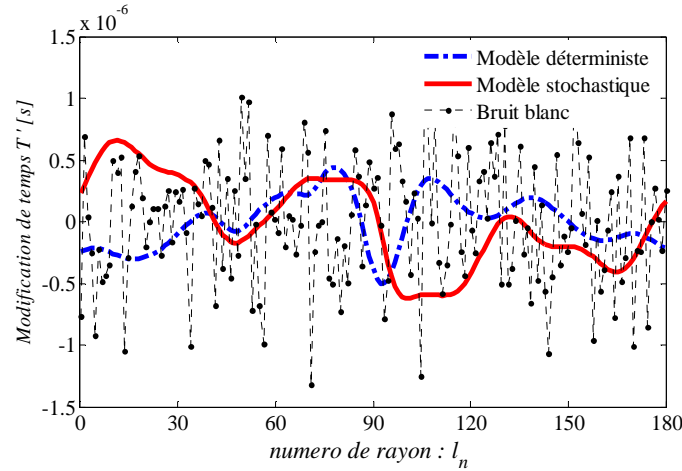


Figure 2-14: Comparaison des fluctuations de temps de vol T' modélisée de 3 façons différentes : modèle déterministe, modèle stochastique et bruit blanc.

On obtient, par comparaison avec le modèle déterministe de référence, une meilleure description de la continuité spatiale de temps de vol avec le modèle stochastique. En effet, les résultats issus du générateur de bruit blanc sont très chahutés. Les amplitudes maximales du champ au point de calcul obtenues à la fois avec les modèles stochastique et déterministe sont indépendantes d'une réalisation à l'autre. En effet, avec le modèle de rayons, à chaque réalisation, on génère une cartographie de vitesse différente. Avec le modèle stochastique, pour chaque application de la formule (2.70), on effectue un tirage aléatoire des orientations de modes ($\kappa_1 \dots \kappa_j \dots \kappa_N$) et un tirage aléatoire des phases ($\phi_1 \dots \phi_j \dots \phi_N$) ; ces tirages sont indépendants d'une réalisation à l'autre. Après simulation avec un grand nombre de réalisations de calcul d'amplitude, on obtient en Figure 2-15 les densités de probabilité d'amplitude maximale au point de calcul avec les différents retards générés par les trois différentes méthodes. L'amplitude maximale en milieu homogène moyenné est représentée par le trait rouge dans les trois figures (Figure 2-15-a-b-c). Les densités de probabilité des résultats issus d'un grand nombre de réalisations avec les modèles déterministe et stochastique ressemblent toutes à une distribution gaussienne et on constate une mauvaise description d'amplitude maximale calculée à partir du bruit blanc qui ne prend pas en compte la corrélation de phase entre rayons voisins.

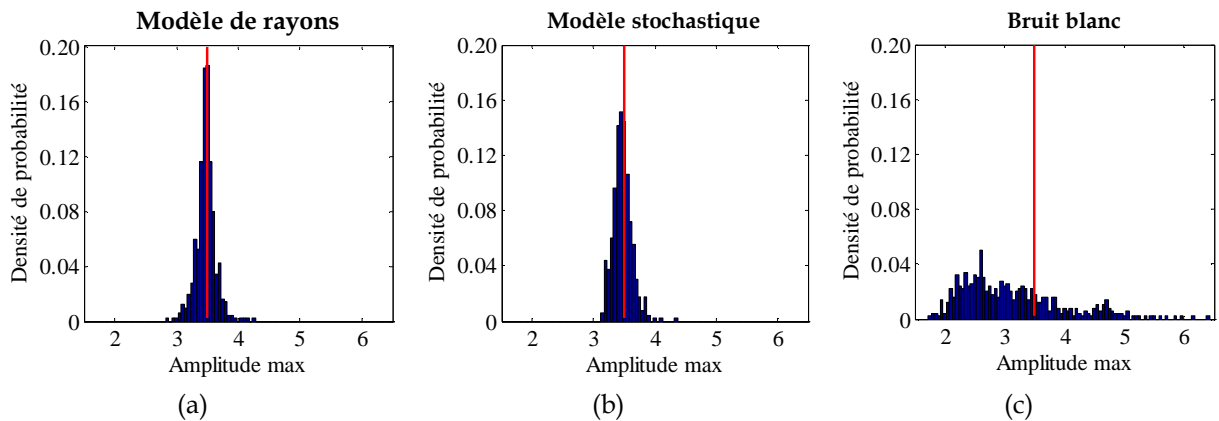


Figure 2-15: Comparaison des densités de probabilité d'amplitude maximale au point de calcul : le trait rouge représente le résultat en milieu homogène ; (a)- Modèle déterministe (rayons) ; (b)- modèle stochastique ; (c) – bruit blanc.

En un seul point de calcul du champ, nous obtenons avec la simulation stochastique des résultats proches de ceux du modèle de rayons, mais le temps de calcul est largement réduit.

2.4.2 Calcul du champ d'un faisceau 2D

Nous avons calculé avec le modèle stochastique dans la partie précédente l'amplitude maximale du champ de propagation en un point donné. Dans cette partie, nous allons étendre l'applicabilité de la modélisation stochastique au calcul de champ dans une zone à deux dimensions. Nous allons donc généraliser la formule (2.70) pour calculer le champ de propagation en différents points à la fois. En effet, si on applique directement la formule (2.70), les amplitudes maximales calculées seront indépendantes d'un point à l'autre car en chaque point, on relance un processus stochastique et la cohérence spatiale d'amplitude entre points de calcul voisins n'est donc pas prise en compte. Afin de constater cette limitation de la formule (2.70), on a réalisé un calcul du champ de propagation d'un faisceau émis par un transducteur circulaire de diamètre 30 mm dans une grille 2D. Comme illustré en Figure 2-16-a, on dispose deux points différents A et B sur la grille et on calcule d'abord les trajets acoustiques en milieu homogène moyenné pour chaque point ; ensuite, pour prendre en compte la variation aléatoire de vitesse en milieu inhomogène, on applique des retards sur chaque trajet acoustique. Mais les retards T'_A calculés pour les trajets du point A sont indépendants des retards T'_B du point B ; par conséquent l'amplitude maximale au point A est indépendante de celle au point B, même si A et B sont deux points voisins. C'est pour cette raison que l'on a constaté sur le faisceau ainsi modélisé (voir Figure 2-16-b) que les amplitudes maximales sont spatialement très chahutées (aspect tacheté de la cartographie de champ) et le manque de corrélation spatiale augmente avec la distance de propagation. Ce résultat de champ ne correspond pas à celui calculé par le modèle de rayons en chapitre 1, car la formule (2.70) employée n'est pas valable pour calculer le champ d'un faisceau en plusieurs points à la fois. La prise en compte de la cohérence d'amplitude entre deux points de calcul est donc indispensable pour modéliser correctement le champ d'un faisceau dans une grille de calcul 2D.

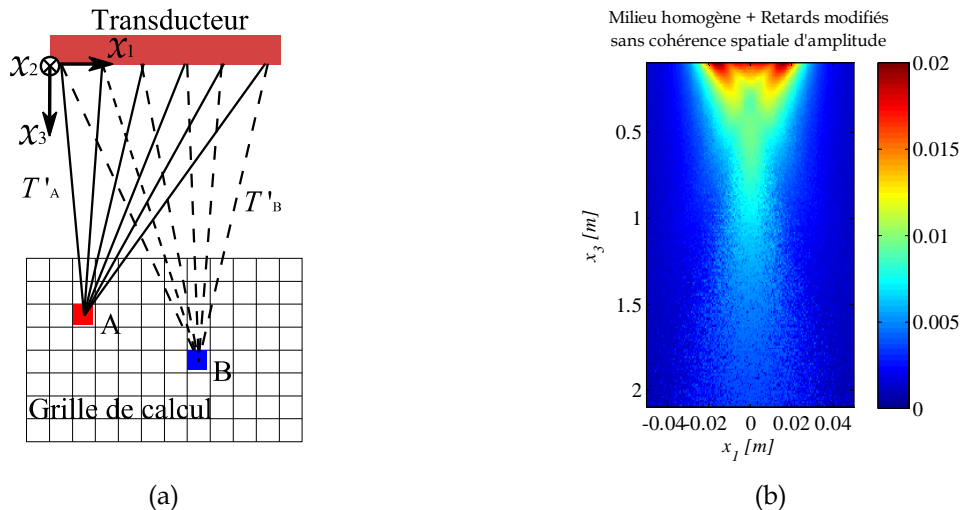


Figure 2-16 : Calcul du champ d'un faisceau réaliste : (a) points de calcul de champ et rayons associés ; (b) champ en milieu inhomogène modélisé par le modèle stochastique sans prise en compte de la cohérence spatiale d'amplitude [formule (2.70)].

Sachant que l'indépendance des résultats entre deux points différents est dû au fait qu'il y a deux processus stochastiques indépendants effectués pour chaque point, il faut donc n'effectuer qu'un seul processus stochastique pour tous les points de calcul à la fois afin de garder la cohérence spatiale d'amplitude. Nous allons généraliser la formule (2.70) pour le calcul d'un champ du faisceau dans une grille. Pour cela, on suppose que le fait de déplacer le point de calcul \mathbf{x} d'une position à l'autre sur la grille de calcul et le fait de changer la position du transducteur sur un repère global du transducteur \mathbf{r} en gardant la position du point de calcul fixe sont équivalents. Nous illustrons ce principe de changement de repère

(voir Figure 2-17) par l'exemple qui montre d'abord le calcul du champ en trois points différents (A, B, C) sur la grille \mathbf{x} en utilisant la formule (2.70). Pour chaque point, on applique une fois la simulation stochastique ; on obtient alors trois résultats de retards T'_A , T'_B , T'_C qui sont complètement indépendants, ce qui donne donc des amplitudes non corrélées.

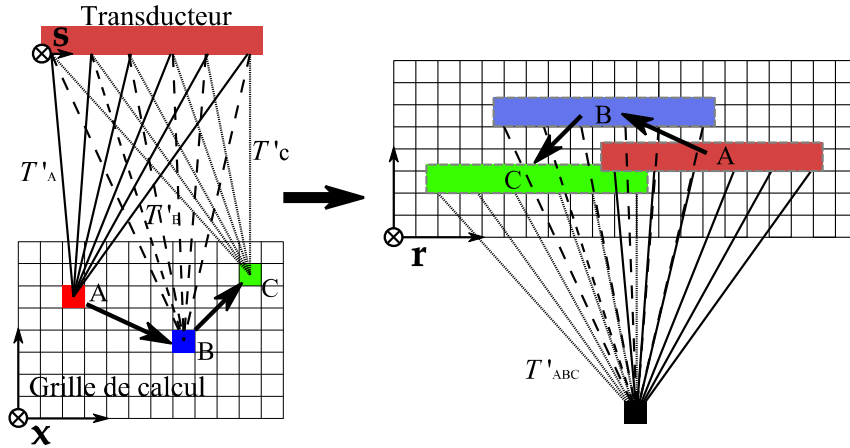


Figure 2-17 : Equivalence entre le fait de déplacer le point de calcul d'une position à l'autre (A → B → C) sur la grille de calcul \mathbf{x} et le fait de changer la position du transducteur sur un repère global du transducteur \mathbf{r} en gardant la position du point de calcul fixe sont équivalents.

Maintenant, si l'on fixe la position du point de calcul et si l'on change la position du transducteur, la formule (2.70) devient alors :

$$T'(\mathbf{r}) = \sqrt{2} \sum_{j=1}^N A_j(|\mathbf{r}|) \cos(\mathbf{\kappa}_j \cdot \mathbf{r} + \varphi_j), \quad (2.71)$$

avec $\mathbf{r} = \mathbf{s} - \mathbf{x}$. Dans le cadre de la modélisation stochastique, la variance de temps de vol est fonction de la distance de propagation et les corrélations spatiales de temps dépendent des écartements entre les points étudiés. On n'a donc pas besoin de connaître les trajets acoustiques réels pour calculer la partie fluctuante de temps associée à chaque trajet et garder la cohérence de phase entre deux trajets voisins.

En utilisant ce changement de repère, le problème du calcul du champ émis par une surface en plusieurs points différents est devenu celui du calcul du champ, émis par plusieurs surfaces à des positions différentes, en un seul point (voir la Figure 2-17). Avec le principe de réciprocité, on peut également considérer le point de calcul comme une source ponctuelle et mesurer le champ sur une surface en réception qui se déplace. Dans ce cas-là, calculer le champ aux points A et B revient à déplacer la surface de réception d'une position à l'autre. L'écartement du déplacement (A → B) est pris en compte pour modéliser la cohérence spatiale de phase entre trajets voisins, ce qui donne lieu à une cohérence spatiale d'amplitude du champ.

Avec la nouvelle formule (2.71), nous avons réévalué le champ dans la configuration de l'exemple donné en Figure 2-16-b ; l'amplitude maximale obtenue est montré en Figure 2-18. Cette fois-ci, le champ n'est pas chahuté contrairement au résultat de la Figure 2-16-b ; la corrélation spatiale d'amplitude est bien prise en compte avec cette nouvelle formulation. Une déviation de faisceau ressemblant à celle issue du modèle déterministe (voir la Figure 1-26-b) est observée. D'une réalisation à l'autre, le faisceau peut être dévié d'un côté différent, car cette déviation résulte de la perturbation du champ de vitesse dans le milieu aléatoire. Dans cet exemple, la zone de calcul a 2500 points et le temps de calcul avec le modèle déterministe est d'environ 2 heures ; avec le modèle stochastique, le temps de calcul est seulement de 10 secondes.

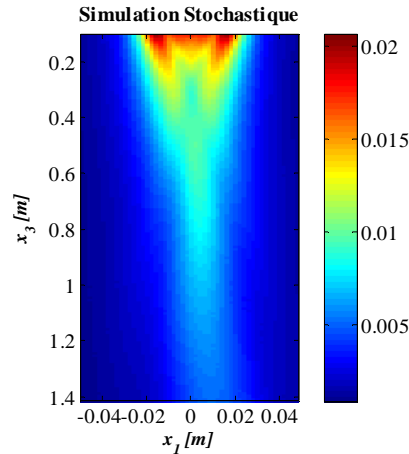


Figure 2-18 : Le champ d'amplitude maximale absolue d'un faisceau réaliste.

Afin de savoir si cette déviation calculée par le modèle stochastique est représentative de la situation réelle, nous pouvons comparer avec les résultats issus du modèle déterministe. Sachant que le modèle stochastique n'est pas fondé sur une cartographie de vitesse donnée, mais sur les propriétés statistiques du champ de célérité, on ne peut comparer entre les deux modèles que les moments statistiques des simulations de champ issues d'un grand nombre de réalisations. Pour le modèle déterministe, une réalisation correspond à une génération indépendante de cartographie de vitesse et pour le modèle stochastique, c'est un processus stochastique indépendant. La comparaison montrée en Figure 2-19 est effectuée sur les amplitudes maximales simulées le long d'une ligne perpendiculaire à la direction de propagation ($x_2 = 0$, $x_3 = 1,4$ m).

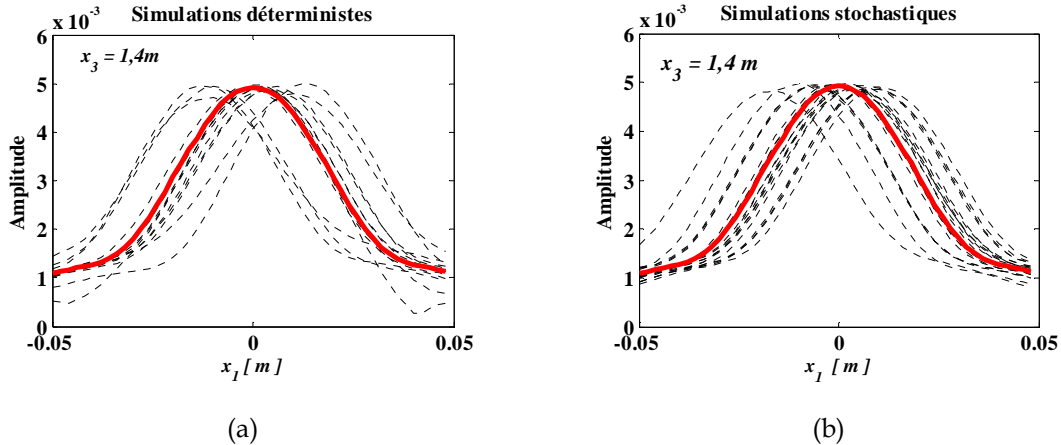


Figure 2-19 : Comparaison des répartitions d'amplitude maximale sur une ligne perpendiculaire à la direction de propagation ($x_2 = 0$, $x_3 = 1,4$ m) ; la courbe rouge représente la répartition d'amplitude en milieu homogène et les courbes en pointillés sont les résultats issus d'un grand nombre de réalisations avec : (a) modèle déterministe ; (b) modèle stochastique.

La courbe rouge représente la répartition d'amplitude d'un faisceau en milieu homogène et les courbes noires en pointillés sont les simulations en milieu aléatoire obtenues avec le modèle déterministe (a) et avec le modèle stochastique (b). On constate que les résultats en milieu aléatoire sont décalés par rapport au résultat en milieu homogène qui a une valeur maximale en $x_1 = 0$; ces décalages représentent les déviations des faisceaux provoquées par la variation aléatoire de vitesse du milieu. La comparaison montre que le modèle stochastique prédit une déviation de faisceau du même ordre de grandeur que celle prédite par le modèle déterministe.

Dans cette partie, afin de simuler la propagation d'un faisceau réaliste en milieu aléatoire, nous avons étendu le modèle stochastique de propagation développé par la prise en compte de la cohérence spatiale d'amplitude entre points de calcul de champ voisins. Ce modèle stochastique fournit les mêmes résultats que le modèle déterministe avec un temps de calcul largement réduit.

2.4.3 Configurations d'inspection usuelles en CND

Dans la partie précédente, nous avons calculé le champ de propagation d'un faisceau réaliste dans un milieu fluide turbulent. Nous avons traité la configuration la plus simple des applications CND : calcul de champ dans une seule zone avec un capteur fixe. Dans la réalité, les configurations sont généralement plus complexes. Avec l'application télémétrie, nous pouvons rencontrer les configurations suivantes : le balayage linéaire ou angulaire illustré en Figure 2-20 (corrélation du champ entre deux positions du transducteur), le contrôle à travers la paroi solide montré en Figure 2-21-a (propagation en solide puis en liquide turbulent) et la propagation à travers un milieu multicouche montré en Figure 2-21-b (différentes propriétés turbulentes dans chaque couche).

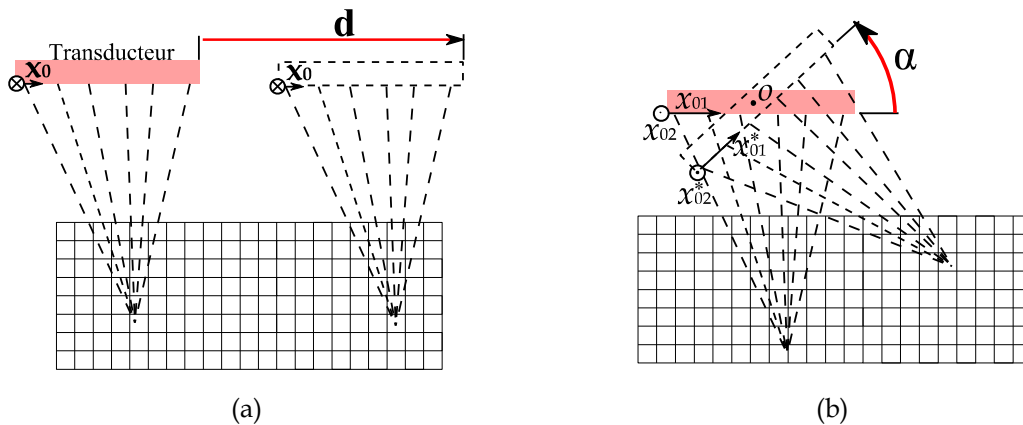


Figure 2-20 : Balayage du transducteur : (a) - Scan linéaire ; (b) – Scan angulaire.

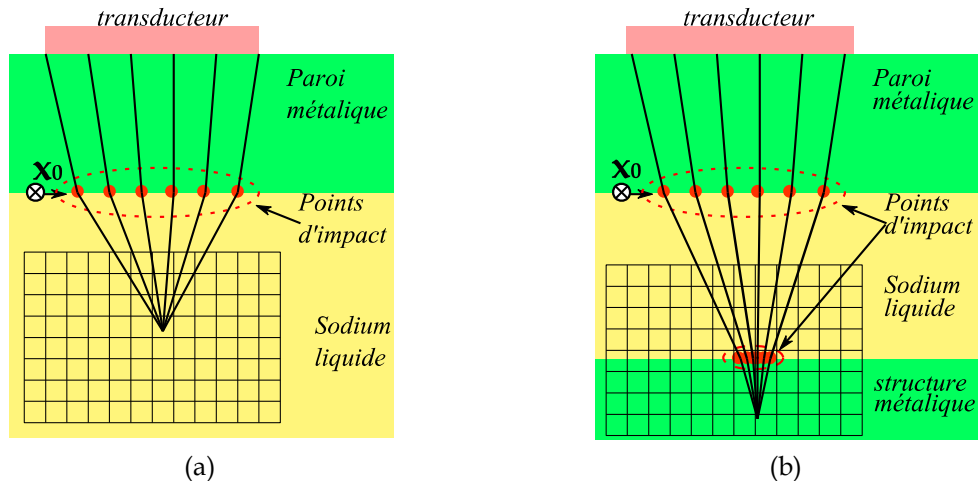


Figure 2-21 : Propagation à travers une paroi métallique : (a) la zone de calcul est dans le fluide ; (b) la zone de calcul est divisée en deux parties : une partie dans le fluide et une partie dans le solide.

Lors du balayage d'inspection, si la vitesse du déplacement du capteur est largement inférieure à la variation de vitesse ultrasonore dans le temps, on considère qu'il n'y a pas de cohérence du champ entre deux positions voisines du transducteur. Dans l'application à la télémétrie, la variation aléatoire de vitesse du son dans le temps est provoquée par la

circulation du sodium. Or le sodium liquide peut se déplacer avec une vitesse maximale de l'ordre de 10 m/s, qui est largement supérieure à la vitesse du balayage mécanique.

On considère alors qu'il n'y a aucune cohérence entre deux positions d'inspection et on applique la formule (2.71) indépendamment à chaque position d'inspection. Au contraire, si le balayage du transducteur est relativement rapide par rapport à la variation de vitesse du son dans le temps, le champ de vitesse est supposé stationnaire, et l'on doit prendre en compte la cohérence du champ de propagation au cours du déplacement. Dans ce cas là, on n'applique qu'une seule fois la formule (2.71) et le déplacement du transducteur est décrit par une transformation mathématique (translation, rotation, etc.). Par exemple pour un déplacement linéaire, le trajet du transducteur est décrit par un vecteur \mathbf{d} (voir la Figure 2-20-a) et la formule (2.71) s'appliquera comme suit

$$T'(\mathbf{r}) = \sqrt{2} \sum_{j=1}^N A_j(|\mathbf{r}|) \cos[\mathbf{k}_j \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{d}) + \varphi_j], \quad (2.72)$$

où $\mathbf{r} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}$, avec \mathbf{x}_0 est les coordonnées des sources hémisphériques sur la surface du transducteur, \mathbf{x} est les coordonnées des points de calcul. Pour une rotation du transducteur (voir la Figure 2-20-b), nous allons modifier les coordonnées $\mathbf{s}(s_1, s_2)$ des sources dans la formule (2.71). On note α l'angle de rotation du capteur autour de l'axe ox_{02} (voir Figure 1-20) ; les nouvelles coordonnées $\mathbf{x}_0^*(x_{01}^*, x_{02}^*)$ des sources hémisphériques deviennent alors :

$$x_{01}^* = (x_{01} - o) \cos \alpha, \quad x_{02}^* = x_{02}. \quad (2.73)$$

On applique la formule (2.71) en remplaçant \mathbf{r} par $\mathbf{r}^* = \mathbf{x}_0^* - \mathbf{x}$.

Pour le contrôle à travers la paroi métallique, l'onde se propage premièrement dans un milieu solide homogène avant de pénétrer dans un milieu liquide turbulent (voir la Figure 2-21). Une modification de la formule (2.71) est nécessaire pour s'adapter à cette situation. Premièrement on ne calcule que la distance $|\mathbf{r}|$ parcourue dans le fluide turbulent. Ensuite, sachant que $\mathbf{r} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}$, les coordonnées de rayons sur la surface du transducteur \mathbf{s} doivent être remplacées par les coordonnées des points d'impact lorsque les rayons franchissent l'interface solide-liquide (Figure 2-21-a). Cette modification est également valide pour la configuration illustrée dans la Figure 2-21-b où il y a une structure métallique immergée dans le fluide et où la zone de calcul couvre une partie de cette structure. Dans ce cas là, la distance parcourue dans le milieu fluide turbulent est la distance entre deux points d'impact sur les deux interfaces : solide-liquide et liquide-solide.

2.5 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Après une propagation en milieu aléatoire, le champ acoustique devient lui-même un champ aléatoire dont les propriétés statistiques sont liées à celles du milieu aléatoire. Nous avons décidé de simuler la propagation d'onde dans un milieu inhomogène aléatoire par un modèle stochastique de propagation qui consiste à coupler le modèle de propagation existant en milieu fluide homogène fondé sur l'acoustique géométrique à des corrections aléatoires de temps de vol pour prendre en compte la perturbation aléatoire de vitesse du son. Les corrections des temps de vol sont modélisées par une aberration aléatoire de phases que nous avons développée et dont les entrées sont les moments statistiques des temps de vol.

Dans un premier temps, nous avons évalué analytiquement les moments statistiques du temps de vol (la moyenne, la variance, la fonction de corrélation transversale et longitudinale) par le biais de la méthode de perturbation (§2.2).

Dans un deuxième temps, afin de modéliser les fluctuations aléatoires du temps de vol associées au champ en milieu inhomogène, nous avons mis au point une aberration statistique de phase fondée sur la méthode de représentation spectrale (§2.3.1). Avec cette aberration de phase, nous avons d'abord réalisé une simulation stochastique d'un champ aléatoire 2D pour calculer les fluctuations de temps de vol sur une surface perpendiculaire à la direction de propagation et située à une distance de propagation fixée (§2.3.2). Les entrées de cette modélisation 2D sont la variance et la fonction de corrélation transversale des temps de vol. Ce champ aléatoire 2D est un champ isotrope, car la fonction de corrélation transversale est isotrope. Une optimisation des paramètres de l'aberration de phase a été effectuée (§2.3.3). En prenant en compte la fonction de corrélation longitudinale du temps de vol, nous avons étendu ce modèle d'aberration aléatoire de phase 2D en 3D (§2.3.4). Les fluctuations des temps obtenues par ce modèle stochastique 3D dans le cas d'une onde plane sont similaires à celles issues du modèle déterministe.

En dernier lieu, nous avons développé un modèle stochastique complet de propagation afin de simuler la propagation d'un faisceau réaliste en milieu aléatoire (§1.3.1). Ce modèle stochastique complet de propagation a été évalué d'abord au niveau du calcul de champ en un point de calcul. La densité de probabilité d'amplitude maximale sur ce point s'avère similaire à celle issue du modèle déterministe. Une technique de transformation géométrique par changement de repère a été mise en œuvre pour prendre en compte la corrélation d'amplitude entre deux points de calcul, ce qui nous a permis de développer une simulation stochastique du champ dans une zone 2D. La modélisation de la propagation fournit une déviation de faisceau de même ordre que celle calculée par le modèle déterministe, mais avec un temps de calcul largement réduit. Nous montrons que l'applicabilité de ce modèle stochastique peut être étendue à des configurations de contrôle complexes par le biais de transformations géométriques (§2.4.3).

3

MODELISATION DE L'INTERACTION ENTRE UN FAISCEAU ACOUSTIQUE ET UNE CIBLE RIGIDE

Ce chapitre est consacré à des travaux relatifs à la deuxième thématique de la thèse nécessaire à la modélisation complète de la télémétrie : l'interaction du faisceau acoustique avec une structure immergée après sa propagation dans le milieu inhomogène aléatoire. Cette étude va permettre de calculer les champs diffusés par les structures de géométries différentes rencontrées à l'intérieur d'un réacteur. Une meilleure connaissance des champs diffusés est en effet essentielle pour la localisation et l'inspection de ces différentes structures. Lors de l'interaction d'une onde avec des cibles de différentes géométries, plusieurs phénomènes physiques peuvent ainsi apparaître, notamment la réflexion spéculaire, la diffraction par les bords, des réflexions successives, la diffraction multiple, les ondes rampantes et les ondes de surface. Nous allons d'abord analyser et identifier les différents problèmes de diffusion d'ondes par des obstacles, et ensuite étudier différentes approches qui permettent de modéliser l'interaction entre une onde et une cible. Nous allons dans cette étude considérer des structures de différentes géométries, et donc choisir les approches les mieux adaptées.

Dans un premier temps, la cible est supposée parfaitement rigide (chapitre 3), puis élastique (chapitre 4), ce dernier cas étant plus représentatif du cas réel.

L'interaction entre un faisceau acoustique et une cible implique des phénomènes de diffraction. Les deux principaux modèles de diffraction sont : la théorie géométrique de la diffraction (GTD) et l'approximation de Kirchhoff (KA). La GTD est une théorie de rayons qui étend la théorie de l'optique géométrique (OG) en ajoutant les rayons diffractés par les discontinuités de l'objet afin de rendre compte du phénomène de diffraction. En revanche, dans le cas de KA, le champ sur les surfaces de la cible est calculé à partir du champ incident en utilisant l'OG ; puis le champ diffusé est déterminé en appliquant une formulation intégrale du champ de surface. Ces deux approches (GTD et KA) présentent chacune des avantages et des inconvénients, mais elles se montrent complémentaires. En les combinant de sorte à ne conserver que leurs avantages, nous développons ici dans le cas d'une cible rigide, en utilisant une procédure similaire à la théorie physique de la diffraction (PTD), un modèle hybride (appelé ici *KA raffiné*) qui fournit une modélisation correcte de la diffusion par une cible rigide à la fois en réflexion spéculaire et en diffraction.

3.1 INTRODUCTION

3.1.1 Problématiques

Dans le chapitre 3, nous présentons des travaux qui concernent la modélisation de l'interaction d'une onde acoustique avec les structures immergées afin de simuler les échos qu'elles génèrent (principalement en rétrodiffusion). Les différentes structures à inspecter en télémétrie sous sodium sont décrites en détail dans les références [60] et [61], et sont illustrées en Figure 3-1. Les surfaces à localiser lors du contrôle sont représentées en violet (en gris en version noir et blanc) et sont respectivement : (a) une structure de grande dimension présentant une forme régulière, lisse et comportant des arêtes ; (b) un triplan (trois facettes planes perpendiculaires) ; (c) un petit triangle et (d) une surface hémisphérique. Ce sont des cibles de géométries typiques qui sont positionnées à l'intérieur du réacteur de nouvelle génération en vue de son inspection et de sa surveillance.

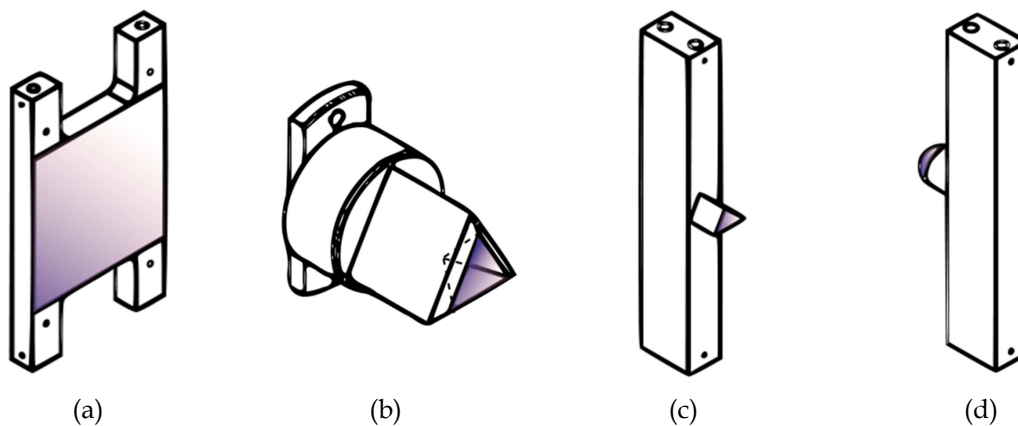


Figure 3-1 : Structures à inspecter : (a) structure de grande dimension ; (b) cible « triplan » ; (c) petite cible triangulaire ; (d) petite cible hémisphérique.

Dans les configurations de contrôle utilisées en télémétrie (décrites au Chapitre 5, en Figure 5-3, 5-4 et 5-5), le capteur émetteur fait aussi office de récepteur, et ne reçoit principalement que les ondes rétrodiffusées par les structures. Le milieu de propagation est par ailleurs considéré localement comme homogène lors de la modélisation de l'interaction faisceau/cible. Lorsqu'une onde acoustique interagit avec ces structures de différentes géométries, on peut identifier différents phénomènes physiques qui sont, pour la structure de grande dimension les réflexions spéculaires, pour la cible triplan les réflexions successives et la diffraction multiple, pour la petite cible triangulaire la réflexion spéculaire et les diffractions par les bords, et pour la cible hémisphérique la réflexion spéculaire.

Notre travail consiste à développer, au sein du logiciel CIVA, un outil qui permette de simuler l'interaction entre une onde acoustique (propagation en milieu fluide) et une structure (solide) immergée, avec la nécessité de prendre en compte à la fois les phénomènes de réflexion et de diffraction. Actuellement dans le logiciel CIVA, les outils existants de simulation ultrasonore sont consacrés principalement à la modélisation de la propagation d'ondes élastiques au sein de matériaux solides et de leur interaction avec des défauts de type fissures, cavités ou inclusions, les interactions faisceau-défaut de type fissure ou cavité étant modélisées à l'aide principalement de deux modèles de diffraction classiques [62] : le premier est la théorie géométrique de diffraction (GTD) qui modélise efficacement le champ de diffraction généré par les bords ou les arêtes d'un défaut, et le deuxième modèle est l'approximation de Kirchhoff (KA) qui simule les échos spéculaires de manière précise, ce dernier présentant l'avantage d'être adapté à des géométries variées de défauts.

Initialement, le logiciel CIVA disposait au démarrage de la thèse d'un modèle d'écho de surface permettant de simuler les échos issus des surfaces d'entrée d'une pièce solide, ce modèle pouvant donc être utilisé pour simuler les échos de cibles immergées telles que celles utilisées en télémétrie. Fondé sur une extension simple de l'approximation de Kirchhoff appliquée à une surface rigide, ce modèle est théoriquement valide pour modéliser les échos de réflexion spéculaire d'interfaces quasi rigides, mais pas en dehors de ces directions d'observation. Il modélise ainsi la diffraction par des arêtes d'objet de manière qualitative, car les phénomènes de diffraction ne sont mis en évidence qu'en dehors de la direction de réflexion spéculaire, et car cette approximation est supposée prédire avec précision surtout les effets de réflexion. Nous devons donc développer un modèle de calcul d'échos plus générique pour des cibles immergées qui sont solides élastiques. Dans un premier temps, nous étudierons dans ce chapitre l'interaction d'une onde acoustique avec des cibles rigides (les modèles développés dans ce chapitre peuvent être étendus de manière similaire au cas de l'interface souple). Nous verrons au chapitre 4 suivant que les modèles traitant des cibles rigides peuvent être étendus à des cibles impédantes d'un point de vue acoustique et notamment à des cibles presque rigides comme celles de notre cas d'étude (interface sodium/acier).

3.1.2 Etat de l'art

Nous avons décrit dans le chapitre 1 la méthode de rayons, fondée sur la notion de rayon, pour calculer la propagation d'une onde de haute fréquence dans un milieu inhomogène dont la longueur caractéristique des inhomogénéités est grande devant la longueur d'onde. Cette méthode est connue sous le nom d'Optique Géométrique (OG), car cette méthode a été inventée initialement pour décrire les phénomènes optiques. Selon l'OG, les trajets acoustiques suivent la loi de Fermat et sont calculés par la résolution de l'équation eikonale ; les angles de réflexion et de réfraction sur une interface sont décrites par la loi de Snell-Descartes ; les amplitudes du champ sont associées aux rayons et respectent la loi de conservation de l'énergie (principe du tube de rayons). En revanche, l'OG ne peut pas décrire les phénomènes liés à la diffraction qui ont été observés expérimentalement. Ainsi, lorsqu'une onde acoustique rencontre un objet impénétrable, l'OG prédit la présence derrière celui-ci d'une zone d'ombre où la pression acoustique est nulle, mais l'expérience ne vérifie pas ce résultat, puisqu'il existe physiquement des rayons diffractés qui pénètrent dans cette zone d'ombre.

Le principe de Huygens, qui considère que toute onde qui se propage se construit par la superposition de petites ondes sphériques issues de chaque point de l'onde initiale, peut expliquer ce phénomène de diffraction, mais n'a pas clairement établi le lien entre l'OG et la diffraction. Ce n'est qu'au début du XXe siècle, qu'une nouvelle branche de la physique mathématique est apparue, la théorie mathématique de diffraction [63]. A l'aide de cette théorie, des solutions exactes aux problèmes de diffraction sur des géométries canoniques, par exemple un dièdre, une sphère ou un cylindre infini, ont été obtenues. Cependant le nombre de géométries traitées est resté relativement faible, et ces solutions sont difficiles à mettre en œuvre en raison de la complexité de l'évaluation des fonctions spéciales.

La théorie géométrique de diffraction (GTD) a été développée par Keller [64] : elle s'appuie sur le développement asymptotique de la solution exacte issue de la théorie mathématique de la diffraction, mais le développement asymptotique classique n'est pas valide dans certaines zones, notamment près d'une caustique et de la zone de transition autour de la frontière d'ombre (voir la Figure 3-2) où le résultat prédit par la GTD tend vers l'infini. Afin de surmonter l'invalidité de la GTD dans la zone de transition, de nombreuses méthodes ont été proposées afin de calculer le champ dans la zone de transition. Citons notamment la méthode de la Théorie Uniforme de la diffraction (UTD, *Uniform Theory of*

Diffraction) proposée par Kouyoumjian et Pathak [65] et la Théorie Asymptotique Uniforme (UAT, *Uniform Asymptotic Theory*). L'UTD consiste à modifier directement le coefficient de diffraction de la GTD par la multiplication d'une fonction de transition (fonction dérivant de l'intégrale de Fresnel), cette fonction permettant à la fois de supprimer la singularité du coefficient aux frontières d'ombre et de fournir un résultat correct dans la zone de transition. En revanche, l'UAT est une approche plus systématique, puisqu'elle utilise l'ansatz de la solution (la forme générale de la solution envisagée) qui fait intervenir une fonction spéciale (l'intégrale de Fresnel). L'UAT substitue ensuite dans l'équation d'onde l'inconnue par cet ansatz en respectant les conditions aux limites, ce qui permet de rechercher directement la solution sous une forme asymptotique valide dans tout l'espace. Ces deux solutions uniformes sont décrites plus précisément dans §3.2.2.

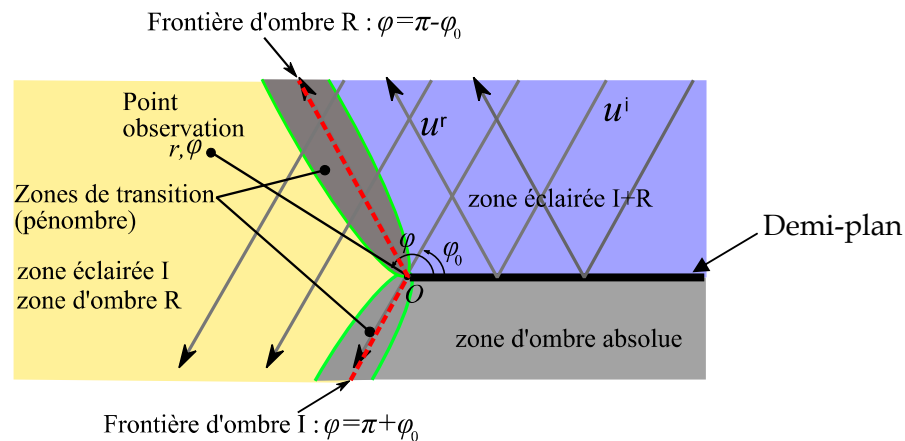


Figure 3-2 : schéma du problème de diffraction où une onde plane acoustique interagit avec un demi-plan.

Dans la réalité, il y a toujours des géométries pour lesquelles on ne dispose ni de solution exacte ni de solution asymptotique. Dans ces circonstances, il existe une autre approche possible valide en haute fréquence, appelée approximation de Kirchhoff (KA) qui est connue sous le nom d'optique physique (OP) dans le domaine de l'électromagnétisme. Pour un objet rigide de géométrie quelconque (peu importe sa complexité), KA formule toujours la solution comme étant l'intégrale du champ de surface sur la surface éclairée de l'objet. Le champ de surface ainsi est défini comme le champ total à la surface de l'objet et est calculé à partir du champ incident en utilisant l'optique géométrique à la fois sur les faces éclairée et ombrée. Ce champ de surface est donc prédit non nul uniquement sur la surface éclairée de l'objet et possède des propriétés différentes selon la condition limite à la surface : il est égal dans le cas de surfaces rigides (dures) à la pression acoustique (source de type monopôle [66]) sur cette surface et dans le cas de surfaces souples (molles) à la vitesse de déplacement sur cette surface (source de type dipôle [66]). KA considère que le champ diffusé dans l'espace après l'interaction d'une onde incidente et d'un objet est le résultat du rayonnement du champ de surface en appliquant la théorie des fonctions de Green. Cette approche fournit un résultat très précis du champ de réflexion spéculaire ; en revanche, le résultat du champ diffracté par une arête d'objet fourni par KA n'est pas supposé être valide d'un point de vue quantitatif.

Pour repousser les limites de KA, Ufimtsev [67] a proposé dans les années 60, une amélioration de KA, appelé la théorie physique de la diffraction (PTD, *Physical Theory of Diffraction*). L'idée originale de la PTD est qu'elle considère que le champ de surface est composé de deux parties : une partie uniforme et une partie non-uniforme. La partie uniforme du champ de surface est exactement celle prise en compte dans l'intégrale de Kirchhoff, et la partie non-uniforme du champ de surface également appelée le champ de

frange se situe uniquement au bord de l'objet. Ce champ de frange peut être obtenu par la différence entre la solution exacte et la solution fournie par KA. En pratique, on considère que cette différence entre solution exacte et KA est équivalente à celle de leurs solutions asymptotiques. En effet, le premier terme du développement asymptotique de la solution exacte est la solution GTD qui est composée d'un champ géométrique (égale à l'optique géométrique) et d'un champ de diffraction d'arête. Le développement asymptotique de l'intégrale de Kirchhoff permet aussi de décomposer le champ total de KA en une contribution géométrique (aussi égale à l'optique géométrique comme pour la GTD) et un champ de diffraction d'arête. Le champ de frange est donc égal à la différence entre les champs de diffraction de la GTD et du développement asymptotique de l'intégrale de Kirchhoff.

Nous allons étudier dans ce chapitre toutes les approches mentionnées ci-dessus et les implémenter dans le cas des cibles rigides afin de comparer ces méthodes et de choisir une méthode pertinente pour des cibles rigides de différentes géométries.

3.1.3 Formulation du problème de diffraction

Nous présentons ici quelques formulations essentielles concernant les problèmes de diffraction en acoustique. Considérons un potentiel de vitesse u (on emploiera par souci de simplicité aux chapitres 3 et 4 la notation u pour faire référence à un potentiel de vitesse en milieu fluide) d'une onde acoustique monochromatique qui vérifie l'équation d'onde :

$$\nabla^2 u + k^2 u = I, \quad \text{avec } \mathbf{v} = \bar{\nabla} u, \quad (3.1)$$

où $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ est le nombre d'onde, λ est la longueur d'onde, ω est la fréquence angulaire, c est la vitesse du son, \mathbf{v} est le vitesse des particules et I représente une source. La dépendance du temps est supposée être sous la forme $\exp(-i\omega t)$, elle sera omise par la suite. La pression acoustique p créée par cette onde acoustique est définies par le biais du potentiel des vitesses u :

$$p = -\rho \frac{\partial u}{\partial t} = i\omega \rho u, \quad (3.2)$$

où ρ est la masse volumique du milieu de propagation.

On étudie souvent les problèmes de diffraction avec deux types classiques de conditions limites imposées sur les objets :

- la condition de Dirichlet :

$$p = 0 \quad \text{donc} \quad u = 0 \quad \text{Cas mou}, \quad (3.3)$$

pour des objets qui ont une surface souple ;

- la condition de Neumann :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{Cas rigide}, \quad (3.4)$$

pour une surface dure, où le gradient normal $\partial u / \partial \mathbf{n}$ représente selon (3.2) la vitesse normale et où \mathbf{n} est la normale à la surface dirigée vers l'extérieur de la cible.

En Figure 3-2, nous présentons un schéma du problème de diffraction suivant : une onde plane acoustique interagit avec un demi-plan. La face supérieure du demi-plan Σ^+ est éclairée par une onde plane incidente u^i avec l'incidence φ_0 . Une partie de l'onde incidente u^i donne naissance à une onde réfléchie u^r sur la surface supérieure du demi-plan Σ^+ qui se propage le long de la direction $\varphi = \pi - \varphi_0$. L'autre partie de l'onde incidente u^i se transmet

directement à travers la zone où le demi-plan est absent selon la direction $\varphi = \pi + \varphi_0$. Par conséquent, la distribution du champ géométrique se distingue en trois zones différentes : la zone éclairée I+R où l'onde incidente et l'onde réfléchie sont toutes deux présentes ; la zone éclairée I où il n'y a uniquement l'onde incidente et l'onde réfléchie est absente, cette zone est appelée par conséquent également la zone d'ombre de l'onde réfléchie ; enfin, la zone d'ombre absolue. Ces trois zones sont séparées par le demi-plan et deux frontières d'ombre : la frontière d'ombre R (indiqué en Figure 3-2), ($\varphi = \pi - \varphi_0$) représente la limite de la zone éclairée par l'onde réfléchie et de même la frontière d'ombre I ($\varphi = \pi + \varphi_0$) représente donc la frontière entre le champ incident et la zone d'ombre absolue. Du fait de la diffraction d'onde par l'arête du demi-plan, l'onde (incidente ou réfléchie) va pénétrer à travers la frontière d'ombre dans la zone d'ombre correspondante, ce qui crée autour de la frontière d'ombre une zone de transition (ou zone pénombre).

3.2 THEORIES GEOMETRIQUES DE LA DIFFRACTION

Afin de décrire le phénomène de diffraction en termes de rayons, J.B. Keller [64] a introduit une nouvelle théorie dans les années 60, appelé la Théorie Géométrique de la Diffraction (GTD). Il a proposé d'étendre l'OG à l'aide du principe de Fermat généralisé en ajoutant aux rayons prédits par l'OG des rayons diffractés lorsque les rayons géométriques rencontrent une discontinuité d'un objet, tel qu'une pointe, une arête ou une ligne de discontinuité de courbure. Le champ total u^t est donc la somme du champ géométrique u^{OG} et du champ diffracté u^d :

$$u^t = u^g + u^d, \quad (3.5)$$

où u^g est donné par l'équation (3.17) et où u^d dépend de la géométrie de la discontinuité de l'objet. Par exemple en Figure 3-3-a, une onde incidente sur une pointe produit une infinité de rayons diffractés qui forment une onde sphérique autour de cette pointe. Lorsqu'une onde incidente rencontre une arête d'objet (Figure 3-3-b), elle crée des rayons diffractés qui se répartissent tous sur un cône dont l'axe est constitué par l'arête (ou sa tangente au point de diffraction) et dont le demi-angle au sommet vaut l'angle que fait le rayon incident avec l'arête. Quand un rayon arrive sur une surface régulière, il va générer des rayons rampants aux frontières d'ombre (Figure 3-3-c), la tangente au rayon rampant est suivant le rayon incident. Au cours de leur propagation, les rayons rampants génèrent des rayons diffractés dans le volume suivant leur tangente. Les rayons diffractés et les rayons rampants respectent impérativement les règles de l'OG pour la phase (équation eikonale) et pour l'amplitude (équation de transport). Dans le cadre de l'application à la télémétrie, nous étudions uniquement les rayons diffractés.

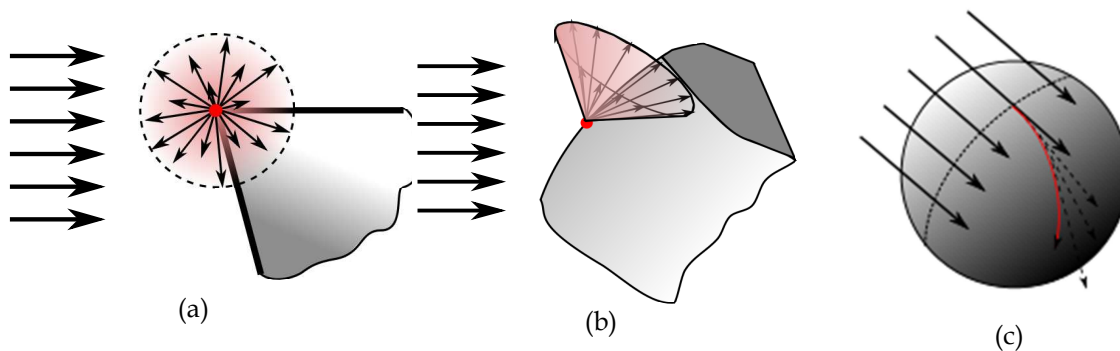


Figure 3-3 : (a) Diffraction d'une onde plane sur une pointe; (b) Diffraction d'une onde plane sur une arête des rayons diffractés créés se répartissent tous sur un cône dont l'axe est constitué par l'arête ; (c) Rayons rampants créés sur une surface régulière.

La GTD a connu un grand succès dans les études des diffractions d'onde électromagnétiques et acoustiques grâce à deux principes sur lesquels elle s'appuie. Premièrement, la GTD est une théorie à la fois intuitive (représentation du phénomène de diffraction en termes de rayons) et rigoureuse, car elle est fondée sur les solutions asymptotiques connues des problèmes canoniques. En effet, Keller a réussi à établir une relation entre la théorie d'OG et la théorie mathématique de diffraction et à interpréter les solutions des problèmes canoniques (souvent sous forme d'une série de fonctions spéciales ou d'intégrale) en termes de rayons à travers les coefficients de diffraction. Le second point important de la GTD est le principe de localité qui suppose que les rayons diffractés ne dépendent que des propriétés locales du champ incident et du point d'interaction de l'objet et du rayon. En remplaçant localement un objet réel par une géométrie canonique avec laquelle on possède une solution exacte, nous pouvons appliquer la GTD aux problèmes de diffraction avec des objets de géométries complexes.

3.2.1 Application de la GTD à la diffraction par une arête rigide

L'interaction d'une onde avec un objet de taille finie provoque très souvent un phénomène de diffraction créé par les arêtes de l'objet. La plupart de ces arêtes peuvent être localement approchées par une géométrie simple : le dièdre (infini en extension selon la direction perpendiculaire au plan de la Figure 3-4) ou le demi-plan infini (lorsque les deux surfaces du dièdre sont superposées). C'est pour cette raison que le dièdre est une géométrie classique et incontournable dans les études de la diffraction des ondes électromagnétiques et acoustiques. La solution exacte du champ diffracté par un dièdre a été calculée par MacDonald [68] par la méthode de séparation des variables formant une série de fonctions de Bessel, mais l'évaluation de cette série est très coûteuse en temps de calcul. Une solution exacte alternative a été également donnée par Sommerfeld [63, 69] sous forme d'une intégrale qui peut être approchée par un développement asymptotique sous forme de série, dont un coefficient de diffraction, élément essentiel de la GTD, peut être extrait. Cependant, dans un premier temps, nous allons présenter le champ géométrique autour d'un dièdre lorsqu'une onde plane arrive sur la surface supérieure du dièdre ($\varphi=0$) avec un angle incident $\varphi=\varphi_0$.

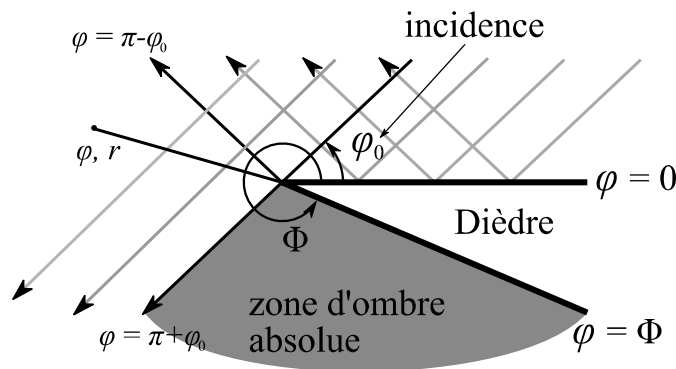


Figure 3-4 : Dièdre d'angle Φ éclairé par une onde plane incidente sur la surface $\varphi=0$ avec un angle incident φ_0 , créant une zone d'ombre ($\pi+\varphi_0 < \varphi < \Phi$) ; le point d'observation se situe en (φ, r) .

3.2.1.1 Champs géométriques (OG)

La géométrie du dièdre est représentée en Figure 3-4 dans un plan et dans un système de coordonnées polaires (r, φ) , sa pointe étant située au point origine $r=0$, et ses deux surfaces planes étant définies par $\varphi=0$, $\varphi=\Phi$, où Φ est l'angle d'ouverture du dièdre. Ce dièdre est immergé dans un milieu fluide homogène, et une onde plane monochromatique incidente

d'angle incident φ_0 et d'amplitude A_0 interagit à la surface ($\varphi=0$). Cette onde se propage vers les r décroissants est représentée par son potentiel des vitesses :

$$u^i(\mathbf{x}) = A_0 e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (3.6)$$

Selon l'OG, cette onde incidente génère sur la surface $\varphi=0$ rigide (condition limite de Neumann), en respectant la loi de Snell-Descartes pour la réflexion, une onde réfléchie se propageant vers les r croissants :

$$u^r(\mathbf{x}) = A_0 e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)}. \quad (3.7)$$

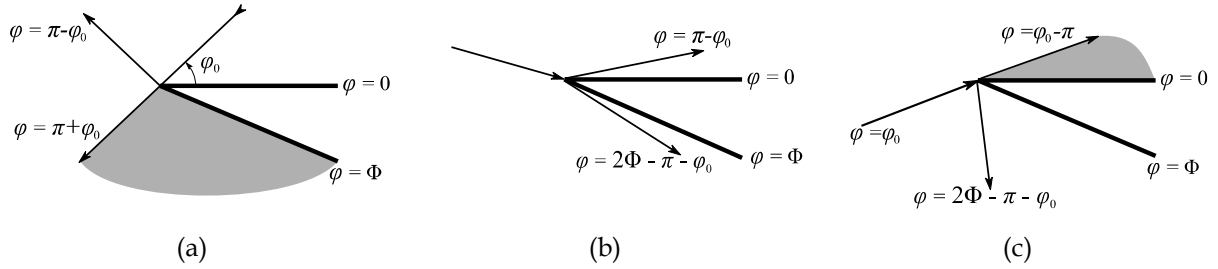


Figure 3-5 : Différentes structures du champ géométrique selon l'angle incident sur un dièdre : (a) l'incidence au dessus de la surface supérieure crée une zone d'ombre au dessous de la surface inférieure ; (b) les deux surfaces du dièdre sont éclairées ; (c) l'incidence sur la surface inférieure du dièdre crée une zone d'ombre au dessus de la surface supérieure.

Selon l'angle d'incident φ_0 , les ondes prédites par l'OG se forment de trois façons différentes, notamment : si $0 < \varphi_0 < \Phi - \pi$ la surface inférieure $\varphi = \Phi$ du dièdre ne sera pas éclairée et une zone d'ombre se forme (partie grise en Figure 3-5-a), le champ total prédit par l'OG (champ géométrique) se répartit dans trois zones différentes

$$u^g = u^i + u^r = e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} + e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} \quad \text{pour } 0 < \varphi < \pi - \varphi_0, \quad (3.8)$$

$$u^g = u^i e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad \text{pour } \pi - \varphi_0 < \varphi < \pi + \varphi_0, \quad (3.9)$$

$$u^g = 0 \quad \text{pour } \pi + \varphi_0 < \varphi < \Phi. \quad (3.10)$$

Lorsque $\Phi - \pi < \varphi_0 < \pi$, les deux surfaces sont éclairées (Figure 3-5-b) :

$$u^g = u^i + u^r = e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} + e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} \quad \text{pour } 0 < \varphi < \pi - \varphi_0 \quad (3.11)$$

$$u^g = u^i = e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad \text{pour } \pi - \varphi_0 < \varphi < 2\Phi - \pi - \varphi_0, \quad (3.12)$$

$$u^g = u^i + u^r = e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} + e^{-ikr \cos(2\Phi - \varphi - \varphi_0)} \quad \text{pour } 2\Phi - \pi - \varphi_0 < \varphi < \Phi, \quad (3.13)$$

et enfin quand $\pi < \varphi_0 < \Phi$, elle crée une zone d'ombre au côté de la surface $\varphi=0$ comme illustrée en Figure 3-5-c. On a :

$$u^g = 0 \quad \text{pour } 0 < \varphi < \varphi_0 - \pi, \quad (3.14)$$

$$u^g = u^i = e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \quad \text{pour } \pi - \varphi_0 < \varphi < 2\Phi - \pi - \varphi_0, \quad (3.15)$$

et

$$u^g = u^i + u^r = e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} + e^{-ikr \cos(2\Phi - \varphi - \varphi_0)} \quad \text{pour } 2\Phi - \pi - \varphi_0 < \varphi < \Phi. \quad (3.16)$$

La situation est plus simple dans le cas d'un demi-plan où $\Phi = 2\pi$, le champ total est donné par :

$$u^g = A_0 e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} H(\pi + \varphi_0 - \varphi) + A_0 e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} H(\pi - \varphi_0 - \varphi), \quad (3.17)$$

où

$$H(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{pour } \xi > 1, \\ 0, & \text{pour } \xi < 1. \end{cases} \quad (3.18)$$

La fonction de Heaviside $H(\xi)$ a pour but d'identifier la zone éclairée et la zone ombrée du champ incident et du champ réfléchi. Si on remplace la fonction de Heaviside $H(\xi)$ par l'intégrale de Fresnel (A.4.7), on trouve la solution exacte dédiée au demi-plan (voir l'Annexe A4). La prédiction de l'OG donne un champ nul dans la zone d'ombre et un saut d'amplitude aux frontières d'ombre (entre la zone éclairée et la zone d'ombre), ce qui ne correspond pas aux phénomènes constatés lors de l'expérience. La GTD consiste donc à ajouter à ces rayons prédits par l'OG un champ diffracté u^d afin de donner une prédiction correcte.

3.2.1.2 Champ diffracté dans le cadre de la GTD

Le champ diffracté est généré le long de la ligne d'arête (voir Figure 3-3-b), dans le cas 2D (incidence orthogonale à l'arête), le cône des rayons diffractés se réduit à un disque dans le plan perpendiculaire à l'arête du dièdre et contenant le rayon incident (voir la Figure 3-6). Le champ diffracté par un dièdre est donc une onde cylindrique se propageant dans toutes les directions de ce disque ($0 < \varphi < \Phi$) avec une décroissance en $r^{-1/2}$. Physiquement, pour concilier cette onde cylindrique avec les ondes planes géométriques, c'est-à-dire assurer les continuités spatiales d'amplitude et de phase, l'onde diffractée cylindrique doit être pondérée par un coefficient de diffraction $D(\varphi, \varphi_0, k)$ qui permet de modifier l'amplitude et la phase de l'onde diffractée. Le champ diffracté peut ainsi s'écrire sous la forme (selon Keller [64]) :

$$u^d(r, \varphi) = D(\varphi, \varphi_0, k, \Phi) A_0 \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}, \quad (3.19)$$

où A_0 est l'amplitude du champ incident, r est la distance d'observation au point de diffraction. Le champ total s'écrit donc :

$$u^t = u^g + D(\varphi, \varphi_0, k, \Phi) A_0 \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}, \quad (3.20)$$

où le champ géométrique u^g est donné par l'équation (3.17), et où le coefficient de diffraction $D(\varphi, \varphi_0, k, \Phi)$ est déterminé par la recherche du développement asymptotique de la solution exacte.

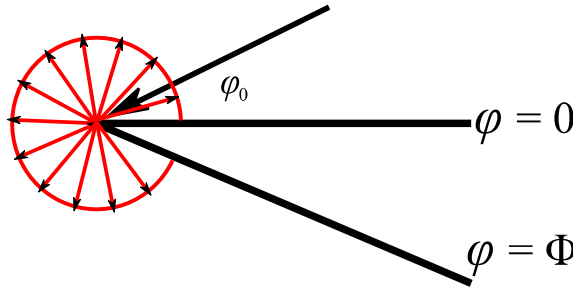


Figure 3-6 : Champ diffracté issu de l'arête d'un dièdre sous forme d'une onde cylindrique avec un rayonnement dans toutes les directions.

- Pour un dièdre rigide, la solution exacte du champ diffracté, suggérée par Sommerfeld [63], s'écrit sous la forme suivante :

$$u^d = A_0 \left[v^d(kr, \varphi - \varphi_0) + v^d(kr, \varphi + \varphi_0) \right], \quad (3.21)$$

avec

$$v^d(kr, \psi) = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{2\pi n} \int_{D_0} \frac{e^{ikr \cos \zeta}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\zeta + \psi}{n}} d\zeta, \quad (3.22)$$

où $n = \Phi/\pi$, $\psi = \varphi + \varphi_0$ et D_0 est le contour de l'intégration illustré en Figure 3-7. En effet, l'équation (3.22) représente une intégrale dont l'intégrand est à oscillation rapide pour $kr \gg 1$; la contribution majeure se trouve autour du point de phase stationnaire (ou point de selle) pour lequel la dérivée de la phase est nulle : $d(r \cos \zeta)/d\zeta = 0$. Ici le point selle se trouve à $\zeta = 0$, et l'exponentielle diminue rapidement en s'éloignant de $\zeta = 0$. Selon la méthode de la plus grande pente (*Method of steepest descent*), l'intégrale (3.22) peut être développée en une série de Taylor autour du point de selle, et le premier terme du développement donne une bonne approximation de l'intégrale quand $kr \gg 1$:

$$v^d(kr, \psi) = \frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi}{n}} \frac{e^{i(kr + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}}. \quad (3.23)$$

Le report de l'expression (3.23) de v^d dans l'équation (3.21) permet d'obtenir le coefficient de diffraction D défini dans (3.19), et noté ici $D_{\text{dièdre}}^{\text{GTD}}$:

$$D_{\text{dièdre}}^{\text{GTD}}(\varphi, \varphi_0, k, \Phi) = \frac{e^{-i\pi/4} \sin \pi/n}{n\sqrt{2\pi k}} \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n}} + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{n}} \right). \quad (3.24)$$

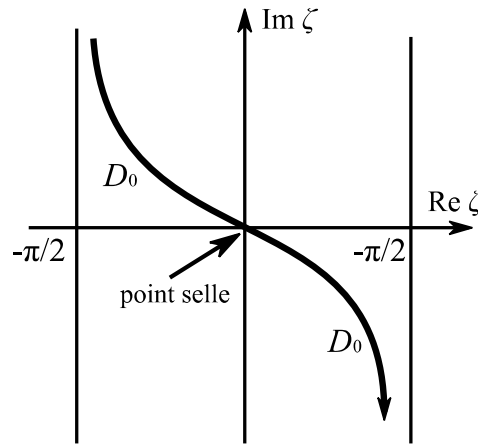


Figure 3-7 : Contour d'intégration de l'équation (3.22).

- Quand $\Phi = 2\pi$, $n = 2$, on trouve le coefficient de diffraction D pour un demi-plan, noté ici $D_{1/2\text{plan}}^{\text{GTD}}$:

$$D_{1/2 \text{ plan}}^{GTD}(\varphi, \varphi_0, k) = -\frac{e^{i(\pi/4)}}{2\sqrt{2\pi k}} \left[\frac{1}{\cos[(\varphi - \varphi_0)/2]} + \frac{1}{\cos[(\varphi + \varphi_0)/2]} \right]. \quad (3.25)$$

En effet, le développement asymptotique de la solution exacte du demi-plan fournie par l'équation A.4.9 en Annexe A4 permet de retrouver le résultat du coefficient de diffraction (3.25).

Si on trace le coefficient de diffraction du demi-plan (3.25) pour un angle incident $\varphi_0 = 50^\circ$ et d'une onde de fréquence $f = 1\text{MHz}$ dans un milieu de la célérité $c = 2472\text{ m/s}$ en fonction de l'angle d'observation $0 < \varphi < 2\pi$ (Figure 3-8), on remarque que le coefficient de diffraction tend vers l'infini pour deux directions d'observation : $\varphi \approx 130^\circ$ et 230° . En effet c'est un défaut du développement asymptotique qui apparaît lorsque deux points critiques sont proches l'un de l'autre. Dans ce cas, le champ géométrique représente un point critique (point de phase stationnaire) de la solution exacte, et le champ diffracté représente un autre point critique (contribution du bord). Les deux points critiques peuvent être représentés par leur fonction de phase ou eikonale (chemin optique) : $s^d = r$ est l'eikonale des rayons diffractés et s^g est l'eikonale des rayons géométriques définie par :

$$s^g = s^i = -r \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (3.26)$$

pour les rayons incidents,

$$\text{et} \quad s^g = s^r = -r \cos(\varphi + \varphi_0), \quad (3.27)$$

pour les rayons réfléchis. Les distances $|s^d - s^g|$ entre les points critiques sont données par :

$$|s^d - s^i| = 2r \cos^2\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right), \quad (3.28)$$

et

$$|s^d - s^r| = 2r \cos^2\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2}\right). \quad (3.29)$$

Lorsque $|s^d - s^g| = 0$, on se situe aux frontières d'ombre du champ réfléchi ($\varphi_1 = \pi - \varphi_0$) et du champ incident ($\varphi_2 = \pi + \varphi_0$) le résultat du développement asymptotique (3.24) n'est plus valide, ce qui est connu comme les singularités de la GTD.

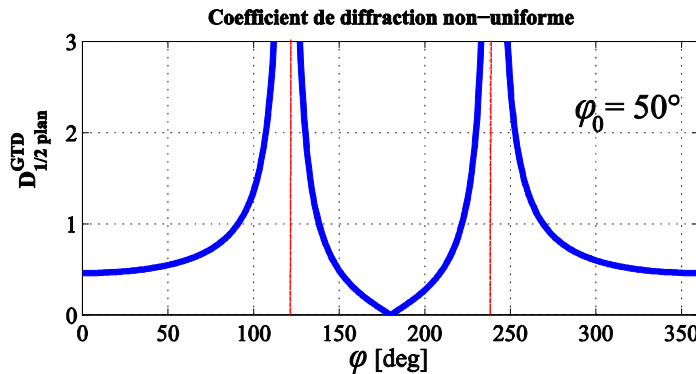


Figure 3-8 : Coefficient de diffraction GTD d'un demi-plan, les lignes rouges indiquant les singularités du coefficient.

Le champ total issu de l'interaction d'une onde plane de fréquence $f = 1\text{MHz}$ avec un demi-plan immergé en sodium à 200°C ($c = 2472\text{ m/s}$) est représenté par les diagrammes d'amplitude absolue de la Figure 3-9. Le demi-plan est indiqué par un segment vert, les points d'observation se situent sur un cercle de rayon r (a : $r = \lambda$; b : $r = 5\lambda$) autour de l'arête

pour une fréquence de 1 MHz et un angle incident $\varphi_0 = 50^\circ$. Les résultats de la GTD (courbes noires pointillées) sont obtenus à l'aide des formules : (3.19), (3.20) et (3.25), et la formule de la solution exacte est donnée par l'équation A.4.9 en Annexe A4 (courbe rouge continue). Dans les zones de transition (pénombres), les solutions de la GTD tendent vers l'infini, en revanche, en dehors de ces zones de transitions, il y a des très bons accords entre la solution exacte et ceux de la GTD.

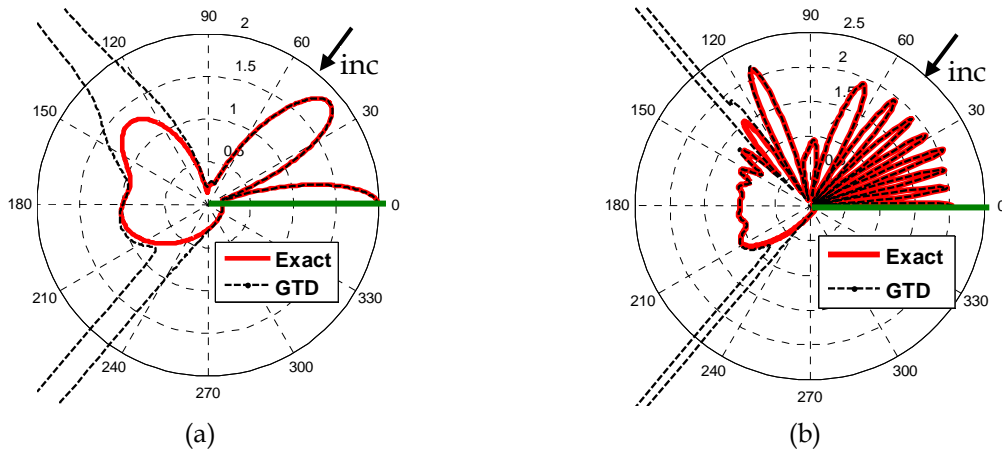


Figure 3-9 : Diagrammes de directivité d'amplitude absolue de la diffraction par un demi-plan (représenté par le segment vert) calculé par le modèle GTD donné par les équations (3.19), et (3.25) (en noir) et avec la solution exacte donnée par l'équation A.4.9 (en rouge) avec $f = 1\text{MHz}$, $c = 2742\text{m/s}$, $\lambda = 1.5\text{mm}$, $\varphi_0 = 50^\circ$ et (a) : $r=1\lambda$ ($kr=3,8$), (b) : $r = 5\lambda$ ($kr=19$).

Pour un dièdre, la situation particulière par rapport au cas d'un demi-plan est que les deux surfaces du dièdre peuvent être éclairées par l'onde incidente, c'est-à-dire le cas de la Figure 3-5-b. Dans ce cas là, nous n'avons plus de zone d'ombre absolue, mais nous avons toujours deux zones de transition où la GTD n'est pas valide, toutes les deux étant à la frontière d'ombre du champ réfléchi. Nous avons calculé le champ total diffusé par un dièdre rigide droit avec une onde plane incidente $\varphi_0 = 120^\circ$; le résultat est illustré en Figure 3-10 (GTD avec la courbe noire en pointillés) ainsi que la comparaison avec la solution exacte fournie par l'équation A.4.29 et A. 4.30 en Annexe A3 (courbe rouge continue).

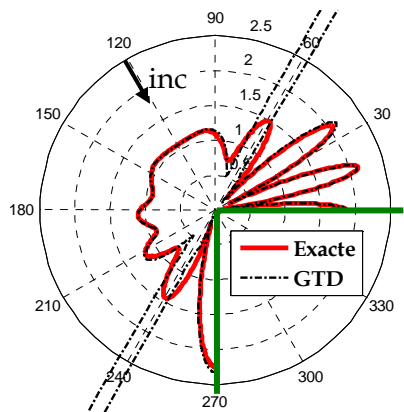


Figure 3-10 : Diagrammes de directivité d'amplitude absolue de la diffraction par un dièdre droit $\Phi = 270^\circ$ dont les deux surfaces sont représentées par les segments verts, avec un angle incident $\varphi_0 = 120^\circ$, $f = 1\text{MHz}$, $c = 2472\text{m/s}$, $\lambda = 1.5\text{mm}$, $r=3\lambda$ ($kr=11.4$), $\varphi_0=50^\circ$; la solution de la GTD est illustrée par la courbe noire en pointillés, et la solution exacte par la courbe rouge continue

Les deux singularités de la GTD sont visibles à partir des comparaisons graphiques en Figure 3-9 et Figure 3-10; on les appelle souvent les zones de transition (ou les zones de pénombre). En dehors de ces zones de transition, on constate le très bon accord du champ

géométrique et aussi du champ de diffraction. Dans l'application pratique, la GTD est plus intéressante que la solution exacte en raison de sa simplicité et du temps de calcul rapide, mais il faut définir la taille de la zone de singularité afin de savoir quelle formule est la plus pertinente. Selon Borovikov [70], on peut définir la taille de la zone de pénombre B par :

$$B = \sqrt{k|s^d - s^g|}. \quad (3.30)$$

En général, si l'erreur de la GTD par rapport à la solution exacte doit être inférieure à 7%, la différence de l'eikonale $|s^d - s^g|$ doit être de l'ordre de la longueur d'onde, c'est-à-dire, si le point d'observation est à l'intérieur de la zone de pénombre dont la taille est B , la GTD fournira une solution avec une erreur supérieure à 7% ; si on veut des résultats plus précis, par exemple avec une erreur inférieure à 1%, la taille B de la zone de pénombre doit être plus large, de l'ordre de 7λ . Si les points d'observation appartiennent à cette zone de pénombre fixée selon le critère d'erreur, il faut chercher une solution valide dans cette zone afin de rendre la GTD plus générique. En effet, il existe des solutions uniformes qui consistent à modifier la GTD pour donner des résultats uniformes dans toutes les directions. Elles sont discutées dans la partie suivante.

3.2.2 Solutions uniformes

Comme nous pouvons le constater à partir des résultats obtenus (Figure 3-9), la GTD n'est pas valide près des frontières d'ombre dans les zones de transition. Ces frontières sont les singularités de la GTD issues du défaut du développement asymptotique de la solution exacte lorsque deux points critiques s'approchent. Depuis les travaux de J.B. Keller, la GTD a fait l'objet de nombreuses études qui ont eu pour but d'en repousser les limites. La Théorie Uniforme de la diffraction (UTD, *Uniform Theory of Diffraction*), proposée par Kouyoumjian et Pathak [65], se fonde sur une modification du coefficient de diffraction GTD donné par (3.24) ou par (3.25) par la multiplication d'une fonction de transition (obtenue à partir de l'intégrale de Fresnel) afin de rendre le champ total fini et continu sur les frontières d'ombre de l'OG. Il existe également une autre approche, appelée Théorie Asymptotique Uniforme (UAT, *Uniform Asymptotic Theory*) et introduite par nombreux auteurs, notamment Lewis et Boersma [71], Ahluwalia [72], Lee et Deschamps [73]. C'est une approche plus systématique, car elle consiste à rechercher directement des solutions de l'équation d'onde sous forme de développements asymptotique à partir d'un « Ansatz » (un postulat de la solution du problème à résoudre). En introduisant, dans l'Ansatz du problème, une fonction spéciale, l'intégrale de Fresnel, nous pouvons trouver la solution uniforme UAT du problème.

3.2.2.1 Théorie Uniforme de la diffraction (UTD)

En examinant le coefficient de diffraction d'un dièdre donné par (3.24), nous remarquons deux pôles : $(\varphi = \pi \pm \varphi_0)$ qui correspondent aux deux frontières d'ombre créées par les champs géométriques. Kouyoumjian et Pathak [65] ont fait intervenir une fonction spéciale F_{KP} afin de supprimer les deux pôles et de donner un résultat correct à la fois dans la zone de transition et en dehors de la zone de transition. Pour présenter cette méthode, nous allons réécrire le coefficient de diffraction (3.24) sous une autre forme :

$$D^{GTD} = -\frac{e^{-i\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k}} \left(\frac{1}{\tan \frac{\pi + (\varphi - \varphi_0)}{2n}} + \frac{1}{\tan \frac{\pi - (\varphi - \varphi_0)}{2n}} + \frac{1}{\tan \frac{\pi + (\varphi + \varphi_0)}{2n}} + \frac{1}{\tan \frac{\pi - (\varphi + \varphi_0)}{2n}} \right), \quad (3.31)$$

où les pôles du coefficient sont toujours : $\varphi = \pi \pm \varphi_0$. La solution de UTD consiste à multiplier chaque terme du coefficient (3.31) par une fonction de transition F_{KP} :

$$D^{\text{UTD}} = \frac{-e^{-i\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k}} \left(\frac{F_{\text{PK}}[kra^+(\varphi - \varphi_0)]}{\tan \frac{\pi + (\varphi - \varphi_0)}{2n}} + \frac{F_{\text{PK}}[kra^-(\varphi - \varphi_0)]}{\tan \frac{\pi - (\varphi - \varphi_0)}{2n}} + \frac{F_{\text{PK}}[kra^+(\varphi + \varphi_0)]}{\tan \frac{\pi + (\varphi + \varphi_0)}{2n}} + \frac{F_{\text{PK}}[kra^-(\varphi + \varphi_0)]}{\tan \frac{\pi - (\varphi + \varphi_0)}{2n}} \right), \quad (3.32)$$

où

$$F_{\text{KP}}(\xi) = 2i\sqrt{\xi} \exp(i\xi) \int_{\sqrt{\xi}}^{\infty} \exp(-i\tau) d\tau, \quad (3.33)$$

et où parmi les arguments, r est la distance entre le point d'observation et le point d'interaction et

$$a^{\pm}(\psi) = 2 \cos^2 \left(\frac{2n\pi N^{\pm} - \psi}{2} \right), \quad (3.34)$$

dans laquelle N^{\pm} est un nombre entier qui vérifie les conditions suivantes :

$$2\pi n N^+ - \psi = \pi, \quad (3.35)$$

et

$$2\pi n N^- - \psi = \pi, \quad (3.36)$$

avec $\psi = \varphi \pm \varphi_0$.

Comme l'UTD est juste une modification du coefficient de diffraction, le champ total calculé par cette méthode est donc similaire à celui de la GTD donné par l'équation (3.20) en remplaçant le coefficient de diffraction par D^{UTD} (3.32) :

$$u^{\text{t}} = u^{\text{g}} + D^{\text{UTD}}(\varphi, \varphi_0, k, \Phi) A_0 \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}. \quad (3.37)$$

A l'extérieur de la zone de transition, le champ total est équivalent à celui calculé par la GTD, mais à l'intérieur de la zone de transition, l'UTD fournit des résultats équivalents à ceux de la solution exacte. Le mécanisme de l'UTD peut être expliqué par la fonction de transition (3.33) qui peut être calculée à partir de l'intégrale de Fresnel $F(\xi)$:

$$F_{\text{KP}}(\xi) = 2i\sqrt{i\pi\xi} \exp(i\xi)(1 - F(\xi)). \quad (3.38)$$

où

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \int_{-\infty}^{\xi} \exp(i\tau^2) d\tau. \quad (3.39)$$

L'amplitude et la phase de la fonction de transition F_{KP} sont présentées dans la Figure 3-11 : quand l'argument kra^{\pm} de la fonction de transition $F_{\text{KP}}[kra^{\pm}(\varphi \pm \varphi_0)]$ dépasse 10, c'est-à-dire à l'extérieur de la zone de transition, l'amplitude tend vers une valeur constante $|F(kra^{\pm})| = 1$, et la phase tend vers zéro ; les deux coefficients D^{GTD} (3.31) et D^{UTD} (3.32) sont alors équivalents. Lorsque l'argument kra^{\pm} de la fonction tend vers zéro (à la frontière d'ombre), l'amplitude de la fonction $F_{\text{KP}}(\xi)$ tend vers zéro pour que l'on puisse supprimer les pôles du coefficient.

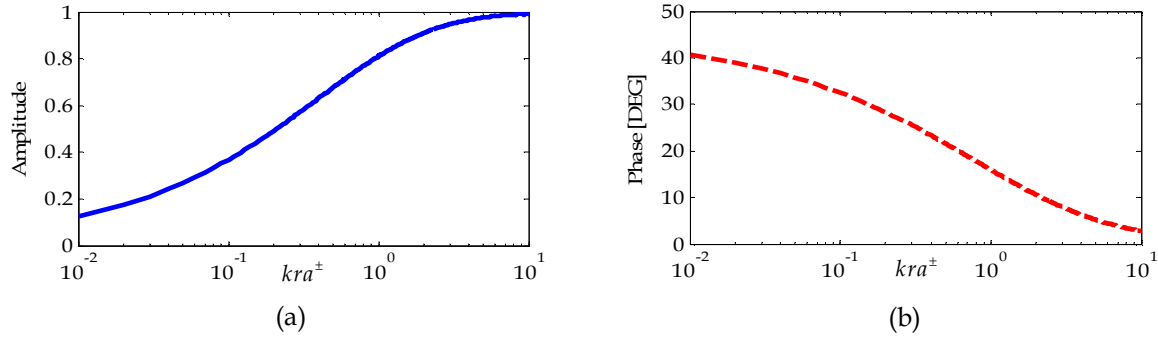


Figure 3-11 : Fonction de transition : (a) amplitude ; (b) phase.

La formule (3.37) est appliquée pour calculer le champ total issu de l'interaction d'une onde plane de fréquence $f = 1$ MHz avec un demi-plan immergé en sodium à 200°C ($c = 2472$ m/s), le résultat est montrée en Figure 3-12.

3.2.2.2 Théorie Asymptotique Uniforme (UAT)

Au lieu de modifier directement le coefficient de diffraction, l'UAT est fondée sur une autre stratégie qui consiste à concevoir un Ansatz dans un premier temps, et reporter ensuite cet Ansatz dans l'équation d'onde (3.1) en respectant les conditions aux limites afin de rechercher directement la solution asymptotique du problème. Selon Lewis et Boersma [71], l'Ansatz non-uniforme du problème de diffraction par une arête s'exprime sous la forme suivante :

$$u^t = u^g + u^d \approx e^{iks^{\text{GO}}} \sum_{m=0}^{\infty} (ik)^{-m} a_m^g + k^{-\frac{1}{2}} e^{iks^d} \sum_{m=0}^{\infty} (ik)^{-m} a_m^d, \quad (3.40)$$

où a_m^g est l'amplitude du champ géométrique d'ordre m et a_m^d est celle du champ diffracté d'ordre m . Un nouvel Ansatz a été proposé par Lee et Deschamps [74]

$$u^t = u^g + u^d, \quad (3.41)$$

avec une modification du champ géométrique par rapport au résultat (3.40)

$$u^g = [F(\xi^{i,r}) - \tilde{F}(\xi^{i,r})] u^{i,r} \quad (3.42)$$

où $\tilde{F}(\xi^{i,r})$ est le terme dominant du développement asymptotique de l'intégrale de Fresnel $F(\xi^{i,r})$ quand $\xi \rightarrow +\infty$

$$\tilde{F}(\xi^{i,r}) = \frac{\exp(\pi i/4 + i\xi^2)}{2\sqrt{\pi}\xi}, \quad (3.43)$$

où $\xi^{i,r} = \sqrt{k(s^d - s^{i,r})}$. En effet le développement asymptotique de l'intégrale de Fresnel est donné par :

$$F(\xi) = \delta(-\xi) + \tilde{F}(\xi^{i,r}) + O(\xi^{-3}), \quad |\xi| \rightarrow +\infty. \quad (3.44)$$

En appliquant l'Ansatz (3.40) au cas d'un demi-plan, nous retrouvons la solution exacte donnée par l'équation A.4.9, car dans ce cas pour le cas le champ diffracté est issu du développement asymptotique de l'intégrale de Fresnel, et le terme u^d s'annule avec le terme $-\tilde{F}(\xi^{i,r}) u^{i,r}$. La solution de l'UAT du problème de diffraction d'une onde acoustique par un demi-plan est donc identique à la solution exacte ; en revanche dans le cas d'un dièdre, la solution de l'UAT n'est pas la même que celle exacte donnée par l'équation (3.22). Pour un dièdre, la solution uniforme de l'UAT sous la forme d'un développement asymptotique est donnée par :

$$u^t = F(\sqrt{k(s^d - s^{i,r})})u^{i,r} + \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \sum_{m=0}^{\infty} (i/k)^{m+1/2} C_m, \quad (3.45)$$

où le facteur C_m est la différence entre le coefficient de diffraction d'un dièdre et celui d'un demi-plan. Selon Borovikov [70], c'est un terme de correction qui accorde les conditions aux limites en passant d'un demi-plan à un dièdre. Le premier terme C_0 du développement asymptotique est donc la différence du coefficient de diffraction du dièdre et de celui du demi-plan :

$$C_0(r, \varphi) = \sqrt{\frac{k}{i}} (D_{\text{dièdre}}^{\text{GTD}} + D_{1/2 \text{ plan}}^{\text{GTD}}), \quad (3.46)$$

où le coefficient de diffraction pour un dièdre $D_{\text{dièdre}}^{\text{GTD}}$ est donné par l'équation (3.24) et le coefficient de diffraction pour un demi-plan $D_{1/2 \text{ plan}}^{\text{GTD}}$ est donné par l'équation (3.25).

Une comparaison des résultats issus de la GTD, l'UTD et de l'UAT (qui est la solution exacte dans le cas d'un demi-plan) est montrée en Figure 3-12. Nous pouvons remarquer qu'avec les approches uniformes les singularités de la GTD sont gommées dans la zone de transition et l'UTD fournit des solutions identiques à ceux de la solution exacte (UAT) ; en dehors des zones de transition la GTD et l'UTD fournissent tous des résultats identiques à ceux de la solution exacte (UAT).

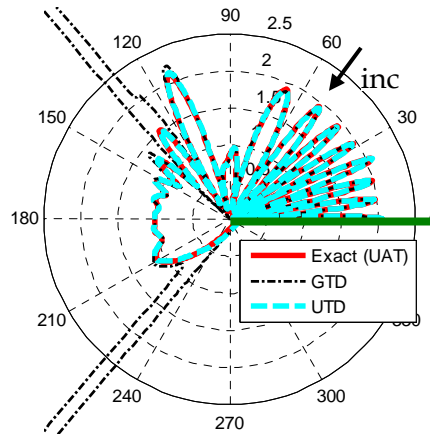


Figure 3-12 : Comparaison du diagramme de directivité du champ diffusé par un demi-plan (segment vert) ; les résultats sont calculés avec l'approche non-uniforme GTD, les approches uniformes UAT et UTD avec $f = 1\text{MHz}$, $c = 2742\text{m/s}$, $\lambda = 1.5\text{mm}$ ($kr=11,4$), $\phi_0=50^\circ$.

La comparaison entre les deux solutions uniformes (UTD et UAT) a été étudiée par Rahmat-Samii et Mittra [75], Boersma et Rahmat-Samii [76], qui ont prouvé que les deux solutions sont identiques si on ne prend en compte que le premier terme du développement asymptotique C_0 . En pratique, la solution UTD est plus simple à manipuler car on modifie uniquement le coefficient de diffraction en le multipliant par une fonction de transition et car les champs géométriques ne changent pas. En revanche, l'UAT nécessite à la fois une modification des champs géométriques par l'intégrale de Fresnel et un ajout d'un terme de correction C_m . Au niveau de la précision fournie, l'UAT possède le terme de correction C_m sous la forme du développement asymptotique, ce qui donne accès à des termes d'ordres plus élevés ($k^{m-1/2}$) que ceux de l'UTD ($k^{-1/2}$). L'UAT donnera donc la solution la plus pertinente lorsque les termes d'ordre plus élevés sont exigés. Pour notre application, une précision d'ordre $k^{-1/2}$ est suffisante pour le champ de diffraction, l'UTD sera donc utilisée comme la référence en validation théorique (par exemple la validation de l'approximation de

Kirchhoff raffinée dans §2.4.2) lorsqu'une solution exacte n'est pas disponible pour sa simplicité par rapport à l'UAT.

3.3 APPROXIMATION DE KIRCHHOFF

La GTD présentée précédemment est une approche basée sur l'OG mais qui y ajoute les rayons diffractés, qui ont généralement des structures différentes de celles des rayons prédits par l'OG. Afin de concilier le champ géométrique et le champ diffracté, les phases et les amplitudes des rayons diffractés ont été modifiées par un facteur, appelé coefficient de diffraction, qui est souvent le premier terme du développement asymptotique de la solution exacte d'un problème canonique (demi-plan, dièdre,...). Grâce au principe de localité, la GTD peut être appliquée pour des problèmes de diffraction par des géométries complexes en considérant qu'une petite partie locale de la géométrie est un problème canonique auquel on peut appliquer un coefficient de diffraction connu. Malheureusement, dans la réalité, il y a toujours des géométries pour lesquelles on ne dispose ni de solution exacte, ni de solution asymptotique. Dans ces circonstances, on a recours à d'autres approximations. L'approximation de Kirchhoff (KA) ou de l'optique physique (OP) sont aussi des approches très appliquées dans les problèmes de diffraction en haute fréquence. Pour un objet de géométrie quelconque, KA formule toujours la solution par une intégrale du champ surfacique sur la face éclairée de cet objet.

3.3.1 Formulation de KA

En effet, au lieu de considérer des rayons comme dans la GTD, l'approximation de Kirchhoff (KA) est une approche basée sur un champ de surface u_0 , c'est-à-dire que le champ diffusé par un objet illuminé par une onde incidente est le résultat du rayonnement de sources de pression se trouvant sur la surface éclairée de cet objet: dans le cas acoustique, le champ de surface est égal, pour la condition de Neumann (cas rigide pour lequel la vitesse normale est nulle), à la pression acoustique sur la surface (source de type monopôle [66]), et à la vitesse particulaire (source de type dipôle [66]) pour la condition de Dirichlet (cas mou pour lequel la pression est nulle). Dans le cas d'une condition aux limites mixte (cas ni rigide, ni mou), le champ de surface est une combinaison linéaire des deux types de champ de surface précédents (cas rigide et mou). Pour calculer ce champ de surface excité par une source extérieure, nous faisons l'hypothèse que la fréquence tend vers l'infini, et la surface diffusante au point de réflexion peut donc être considérée comme une surface tangente à ce point. La source se trouvant sur cette surface tangente peut être facilement calculée par l'OG, ainsi que par la méthode des sources images (voir la Figure 3-13). Le champ de surface total u_0 généré par une source extérieure au dessus d'une surface infinie est la somme du champ incident et du champ réfléchi, ce dernier pouvant être interprété comme un champ créé par la source d'image.

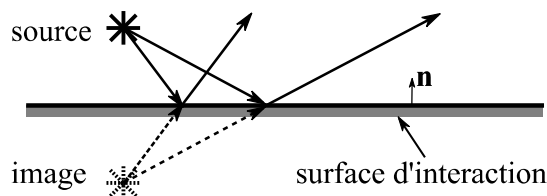


Figure 3-13 : Principe de la source d'image.

Sur une surface souple (condition de Dirichlet), la pression et donc le potentiel de vitesse sont nuls en raison de la condition limite (3.3), et la dérivée du potentiel de vitesse par rapport la normale à la surface tangente est égale à :

$$\frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} = 2 \frac{\partial u^i}{\partial \mathbf{n}}. \quad (3.47)$$

Sur une surface rigide (condition de Neumann), la dérivée du potentiel de vitesse par rapport à la normale est nulle en raison de la condition limite (3.4), et le champ de potentiel de vitesse est donné par :

$$u_0 = 2u^i. \quad (3.48)$$

3.3.1.1 Le problème d'un demi-plan

La formule théorique de KA est présentée d'abord dans le cas d'un problème simple, celui de la diffraction d'une onde plane sur un demi-plan étendu à l'infini suivant x_3 (voir la Figure 3-14). Une onde plane u^i , incidente sur la surface Σ^+ d'un demi-plan, crée un champ de surface u_0 qui rerayonne ensuite un champ diffusé u^{dif} dans l'espace, d'où le champ total u^t :

$$u^t = u^i + u^{\text{dif}}, \quad (3.49)$$

où le champ incident est une onde plane (d'angle incident φ_0) telle que :

$$u^i = A_0 e^{ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} = A_0 e^{-ik(x_1 \cos \varphi_0 + x_2 \sin \varphi_0)}. \quad (3.50)$$

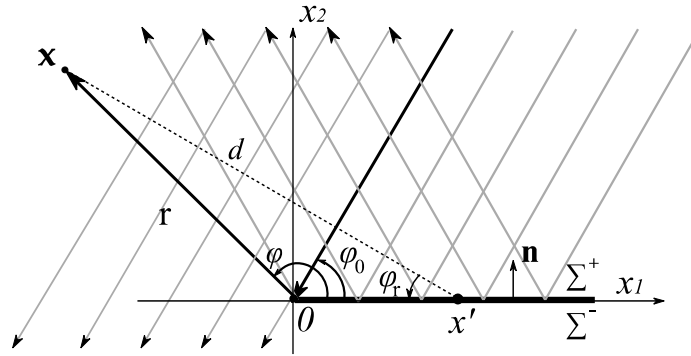


Figure 3-14 : Définitions des grandeurs.

Par application de l'approximation de Kirchhoff, le champ total (champ de surface) est nul sur la surface ombrée $\Sigma^- : u^t(\Sigma^-) = 0$, et le champ total (champ de surface) sur la surface éclairée Σ^+ est obtenu par application de l'optique géométrique. En appliquant le théorème de Green [77], nous pouvons calculer le champ diffusé u^{dif} en un point d'observation $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ de l'espace par l'intégrale suivante :

$$u^{\text{dif}}(\mathbf{x}) = \int_{\Sigma} \left(u_0(x') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{x}, x') - \frac{\partial u_0(x')}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{x}, x') \right) d\Sigma, \quad (3.51)$$

où $x'(\xi, \zeta)$ est la variable d'intégration qui désigne un point courant sur la surface Σ^+ selon l'axe x_1 et l'axe x_3 et $G(\mathbf{x}, x')$ est la fonction de Green qui a la forme suivante :

$$G(\mathbf{x}, x') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{x} - x'|}}{|\mathbf{x} - x'|}, \quad (3.52)$$

où $|\mathbf{x} - x'|$ est la distance entre le point d'observation et le point courant de la surface Σ : $|\mathbf{x} - x'| = \sqrt{(x_1 - \xi)^2 + x_2^2 + \zeta^2}$. Pour un demi-plan rigide, $\partial u_0(x')/\partial \mathbf{n}$ est nul, et par application de l'optique géométrique selon l'équation (3.48), le champ de surface sur la surface éclairée Σ^+ devient

$$u_0(x') = 2u^i(\varphi = 0) = 2A_0 e^{-ik\xi \cos \varphi_0}. \quad (3.53)$$

L'équation (3.51) s'exprime donc sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u^{\text{dif}}(\mathbf{x}) &= \int_{\Sigma^+} 2A_0 e^{-ik\xi \cos \varphi_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{x}, x') d\Sigma^+ \\ &= \frac{A_0}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-ik\xi \cos \varphi_0} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{e^{ik\sqrt{(x_1-\xi)^2 + x_2^2 + \zeta^2}}}{\sqrt{(x_1-\xi)^2 + x_2^2 + \zeta^2}} d\zeta, \end{aligned} \quad (3.54)$$

où l'intégration sur la variable ζ peut être exprimée via la fonction de Hankel :

$$H_0^{(1)}(kd) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik\sqrt{d^2 + \zeta^2}}}{\sqrt{d^2 + \zeta^2}} d\zeta, \quad (3.55)$$

où $d = |\mathbf{x} - x'|$. L'expression (3.54) devient :

$$u^{\text{dif}}(\mathbf{x}) = \frac{iA_0}{2} \int_0^{+\infty} e^{-ik\xi \cos \varphi_0} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} H_0^{(1)}(k\sqrt{(x_1-\xi)^2 + x_2^2}) d\xi. \quad (3.56)$$

où l'intégration s'effectue sur la surface éclairée Σ^+ du demi-plan avec $0 < \xi < +\infty$. En pratique, la fonction de Hankel est coûteuse en temps de calcul, et on applique souvent sa forme approchée issue d'un développement asymptotique valide en champ lointain :

$$H_0^{(1)}(kd) \approx \sqrt{\frac{i}{8\pi kd}} \exp(ikd), \quad (3.57)$$

et

$$\frac{\partial H_0^{(1)}(kd)}{\partial \mathbf{n}} \approx -\sin \varphi_r \sqrt{\frac{k}{8i\pi d}} \exp(ikd), \quad (3.58)$$

où φ_r est l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{\xi \mathbf{x}}$ et la surface Σ^+ (voir la Figure 3-14). Avec l'approximation en champ lointain (3.58), la formule (3.56) devient donc

$$u^{\text{dif}}(\mathbf{x}) = -A_0 \sqrt{\frac{k}{2\pi i}} \int_0^{+\infty} \sin \varphi_r e^{ik(\xi \cos \varphi_0 + d)} d\xi. \quad (3.59)$$

Pour valider la méthode KA, la formule exacte (sans approximation champ lointain) de KA (3.56) est appliquée au calcul du champ total u^t issu d'un demi-plan en effectuant la somme $u^t = u^i + u^{\text{dif}}$. En Figure 3-15, nous montrons les diagrammes d'amplitude du champ total u^t de KA (courbes bleues en pointillés) et du champ issu de la solution exacte (courbes rouges continues) ; les points d'observation se situent sur deux cercles de rayons différents : $r = 1\lambda$ et $r = 5\lambda$. On peut constater qu'en champ proche ($r = 1\lambda$), il y a des erreurs visibles de KA dans la zone d'ombre ($\varphi > 230^\circ$), et il y a un très bon accord avec les résultats exacts autour de la direction spéculaire ($\varphi \approx 130^\circ$). En effet, l'approximation de Kirchhoff n'est pas capable de prédire correctement le champ de diffraction par l'arête. En champ lointain ($r = 5\lambda$), globalement on trouve un très bon accord entre les solutions fournies par KA et la solution exacte dans la zone éclairée ainsi que dans la zone d'ombre.

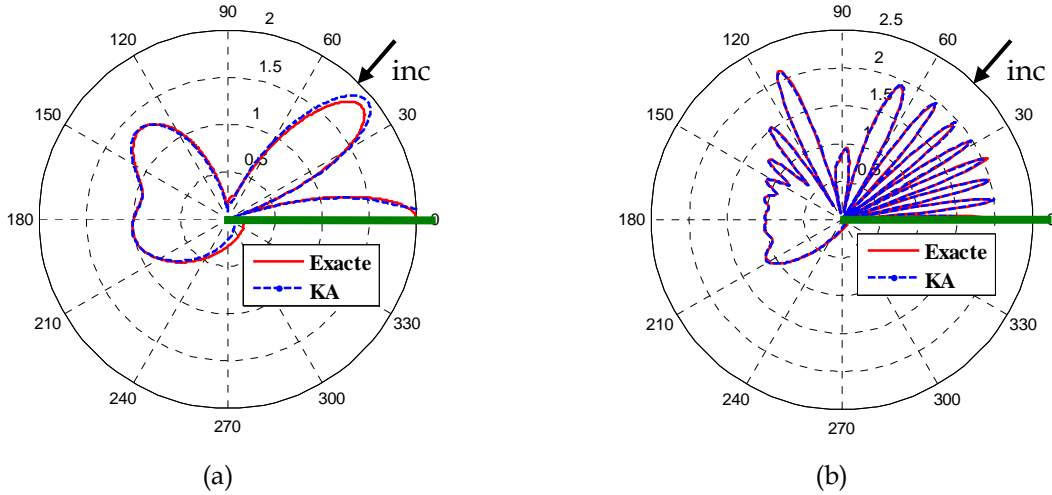


Figure 3-15 : Comparaison des diagrammes de directivité d'un demi-plan infini entre la solution exacte et la prédiction de la KA, avec $f = 1\text{MHz}$, $c = 2742\text{m/s}$, $\lambda = 1.5\text{mm}$ ($k=2541\text{ m}^{-1}$), $\phi_0=50^\circ$: (a) $r=1\lambda$ ($kr=3,8$); (b) $r = 5\lambda$ ($kr=19$).

3.3.1.2 Problème d'un dièdre

Si on applique l'approximation de Kirchhoff pour calculer le champ diffracté, on rencontre deux situations différentes selon qu'il y a ou non l'une des deux surfaces qui est éclairée par l'onde incidente, comme illustré en Figure 3-5. S'il n'y a qu'une des deux surfaces du dièdre qui est éclairée par l'onde incidente, $0 < \phi_0 < \Phi - \pi$ ou $\pi < \phi_0 < \Phi$, comme illustré en Figure 3-5-a et 3-5-c, on considère que c'est la même situation que le problème d'un demi-plan car la surface située dans la zone d'ombre ne possède pas de champ de surface, autrement dit, KA ne "voit" pas la face cachée de la géométrie. Si les deux surfaces du dièdre sont éclairées par l'onde incidente (Figure 3-5-b: $\pi < \phi_0 < \Phi - \pi$), l'intégrale de Kirchhoff (3.56) doit être effectuée sur les deux surfaces. L'intégration sur la surface supérieure $\varphi = 0$ est donnée par l'équation (3.56) ; l'intégration suivant la deuxième surface peut être calculé à partir de la même équation (3.56) avec un simple de changement de repère du point d'observation \mathbf{x} :

$$\begin{aligned} x_1^\Phi &= x_1 \cos \Phi + x_2 \sin \Phi, \\ x_2^\Phi &= -x_1 \sin \Phi + x_2 \cos \Phi, \end{aligned} \quad (3.60)$$

où Φ est l'angle du dièdre. Substituons ces nouvelles variables (x_1^Φ, x_2^Φ) respectant la surface inférieure du dièdre dans l'intégrale (3.56), nous obtenons le champ rayonné par le champ de surface de la surface $\varphi = \Phi$: $u^{sc}(\mathbf{x}^\Phi)$. Le champ diffusé par le dièdre est donc :

$$u^{\text{dif}} = u^{\text{dif}}(\mathbf{x}) + u^{\text{dif}}(\mathbf{x}^\Phi). \quad (3.61)$$

Les résultats présentés en Figure 3-16 montrent les deux situations que l'on rencontre sur un dièdre en appliquant KA : (a) une seule surface est éclairée par une onde plane incidente $\phi_0 = 50^\circ$; (b) deux surfaces sont éclairées avec un angle incident $\phi_0 = 120^\circ$. Pour les deux situations, on peut constater que globalement il y a un bon accord entre les solutions fournies par KA et la solution exacte dans la zone éclairée ainsi que dans la zone d'ombre. Nous pouvons également remarquer la légère erreur de KA dans certaines directions.

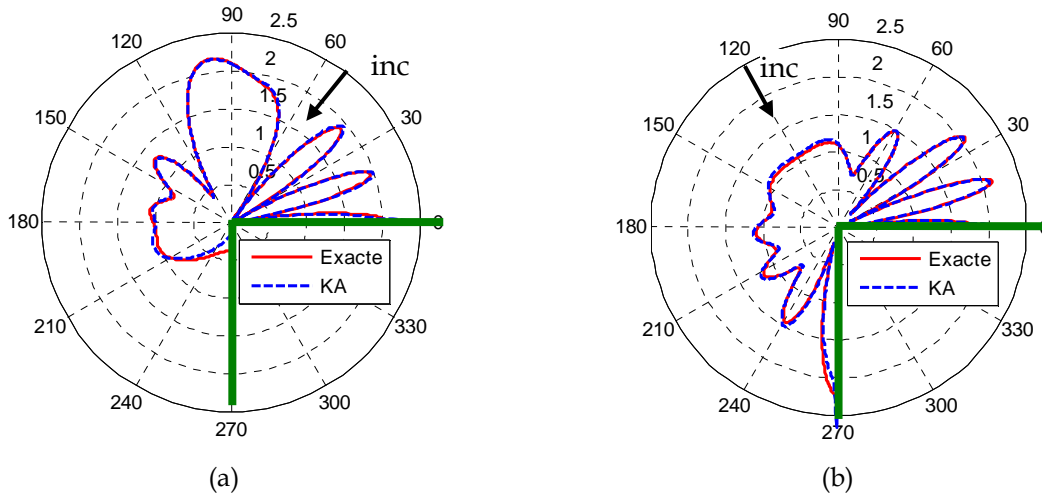


Figure 3-16 : Comparaison des diagrammes de directivité entre la solution exacte et la prédiction de la KA sur un dièdre rigide de $\Phi = 270^\circ$ et avec $f = 1\text{MHz}$, $c = 2472\text{m/s}$, $\lambda = 1.5\text{mm}$ ($kr=11,4$), $\varphi_0=50^\circ$, $r=3\lambda$ et l'angle incident (a) $\varphi_0 = 50^\circ$; (b) $\varphi_0 = 120^\circ$.

3.3.1.3 Validation de KA

Pour une prédiction du champ diffracté par un demi-plan, l'erreur commise par KA par rapport à la solution exacte est calculée dans un espace 2D autour du demi-plan et illustrée en Figure 3-17. Le milieu de propagation et le signal sont les mêmes que ceux utilisés dans les exemples montrés en Figure 3-15 et Figure 3-16 avec le même angle incident : $\varphi_0 = 50^\circ$. Nous constatons que les erreurs sont plus importantes quand on est proche du demi-plan ; elles diminuent avec l'augmentation de la distance d'observation et la fréquence de l'onde incidente, ce qui est cohérent avec les résultats montrés en Figure 3-15 : nous avons des erreurs plus importantes en champ proche ($r = 1\lambda$) qu'en champ lointain ($r = 5\lambda$).

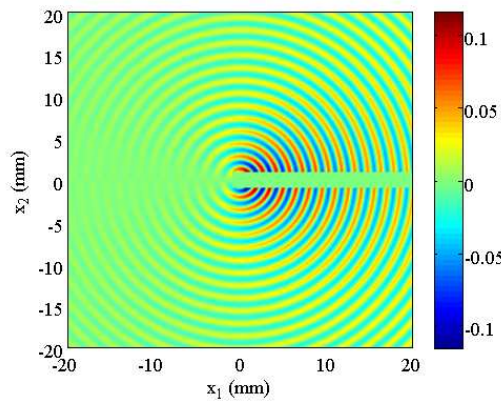


Figure 3-17 : Erreur normalisée de KA lors de la prédiction du champ diffracté par un demi-plan, angle incident $\varphi_0=50^\circ$.

On peut conclure cette partie par une comparaison entre la GTD et la méthode KA. KA n'a aucun problème de singularité (caustique, frontière d'ombre) et fournit des résultats uniformes dans toutes les directions et très proches de la solution exacte avec une certaine d'erreur du champ de diffraction par une arête. Cette erreur va être corrigée dans la partie suivante par le modèle de l'approximation de Kirchhoff raffinée. Pour des géométries complexes, KA est plus facile à mettre en œuvre avec sa formulation intégrale que la GTD ; une fois que l'on connaît le champ de surface (fourni par l'OG), on peut calculer le champ diffracté par l'intégration du champ de surface. Quand à la GTD, les bords (où la diffraction a lieu) de la géométrie doivent pouvoir être approchés localement par des géométries

canoniques (demi-plan, dièdre). Mais en réalité, ce genre d'approche n'est pas toujours possible sur une géométrie quelconque. KA ne traite pas les diffractions multiples successives, par exemple sur une cible triplan. Pour les problèmes de réflexion multiple, par exemple s'il y a eu lieu N réflexions successives sur un objet particulier, on calcule souvent les $N-1$ premières réflexions avec l'OG et on applique KA pour traiter la dernière réflexion.

3.4 UN RAFFINEMENT DE L'APPROXIMATION DE KIRCHHOFF A L'AIDE DE LA THEORIE PHYSIQUE DE LA DIFFRACTION

Selon les études précédentes, nous avons pu remarquer que les deux modèles classiques GTD et KA présentent chacun des avantages et des inconvénients et paraissent complémentaires. Nous avons essayé de chercher un modèle d'interaction plus générique s'appuyant sur les deux modèles précédents dans le but de modéliser correctement à la fois la réflexion spéculaire et la diffraction par une arête. La théorie physique de la diffraction (PTD, *the Physical Theory of Diffraction*) étend l'approximation de Kirchhoff afin d'améliorer la prédiction par KA de la diffraction par une arête.

Afin de corriger la partie du champ diffusé correspondant à la diffraction dans la formulation de Kirchhoff, nous devons donc décomposer le champ diffusé u^{dif} calculé par l'intégrale de KA (3.56) en deux parties : la partie du champ de réflexion spéculaire et la partie de diffraction par une arête. En appliquant la méthode de la phase stationnaire [12], nous avons pu identifier deux parties principales dans l'intégrale de Kirchhoff : la partie du champ géométrique qui correspond à la partie réflexion du champ diffusé u^{dif} et la partie de diffraction.

3.4.1 Développement asymptotique de l'intégrale de Kirchhoff

3.4.1.1 Cas d'un demi-plan

La décomposition de l'intégrale de Kirchhoff consiste à rechercher l'expression asymptotique de l'équation (3.56) qui est la somme de la contribution du bord de l'intégration (la borne $\xi = 0$ fournit le champ diffracté par l'arête) et de la contribution de la phase stationnaire (champ géométrique). Remplacer $\partial H_0^{(1)}/\partial \mathbf{n}$ dans l'intégrale (3.56) par (3.58) conduit à :

$$u^{\text{dif}}(\mathbf{x}) = -A_0 \sqrt{\frac{k}{2i\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \varphi_r e^{-ik(\xi \cos \varphi_0 + \sqrt{(x_1 - \xi)^2 + x_2^2})}}{[(x_1 - \xi)^2 + x_2^2]^{1/4}} d\xi, \quad (3.62)$$

où le point de phase stationnaire peut se déduire de

$$\frac{d}{d\xi} \left[\xi \cos \varphi_0 + \sqrt{(x_1 - \xi)^2 + x_2^2} \right] = \cos \varphi_0 + \frac{-2\xi}{2\sqrt{(x_1 - \xi)^2 + x_2^2}} = \cos \varphi_0 - \cos \varphi_r = 0, \quad (3.63)$$

soit

$$\varphi_r = \pm \varphi_0. \quad (3.64)$$

Ce dernier résultat montre qu'il existe deux contributions de phase stationnaire dans l'intégrale de Kirchhoff (3.62). Selon Borovikov [78], lorsque $\varphi_r = \varphi_0$, la contribution de cette phase stationnaire est obtenue par

$$u_1^{\text{sc}} \simeq A_0 e^{-ik(x_1 \cos \varphi_0 - x_2 \cos \varphi_0)}, \quad (3.65)$$

ce qui correspond au champ réfléchi sur la surface Σ^+ . Lorsque $\varphi_r = -\varphi_0$, on trouve la contribution suivante :

$$u_2^{\text{sc}} \simeq -A_0 e^{-ik(x_1 \cos \varphi_0 + x_2 \cos \varphi_0)}, \quad (3.66)$$

ce qui correspond à un champ symétrique à u_1^{sc} qui se situe dans la zone d'ombre (car $\varphi_r = -\varphi_0$), champ qui n'est pas physique. Comme il a la même direction de propagation mais une amplitude opposée au champ incident, on peut donc le supprimer en ajoutant le champ incident (voir la Figure 3-18).

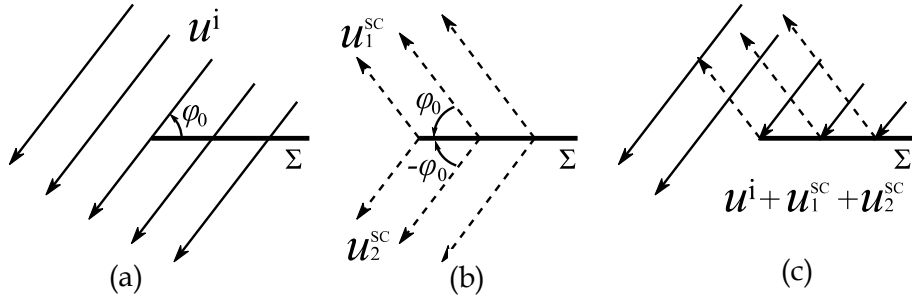


Figure 3-18 : Les contributions des phases stationnaires de l'intégrale de Kirchhoff sont le champ réfléchi u_1^{sc} (b) et un champ dans la zone d'ombre symétrique à u_2^{sc} qui est supprimé par sommation (c) avec le champ incident (a).

Une autre contribution de l'intégrale de Kirchhoff est issue de la limite de l'intégration (3.62), où $\xi=0$. Considérons en effet une intégrale bornée suivante :

$$I(k) = \int_a^b e^{ikS(\xi)} f(\xi) d\xi, \quad (3.67)$$

où $S(\xi)$ est la fonction de phase, $f(\xi)$ est la fonction de poids. Le développement asymptotique de cette intégrale bornée est donné par :

$$I(k) = \int_a^b e^{ikS(\xi)} f(\xi) d\xi \simeq \frac{e^{ikS(a)}}{S'(a)} \sum_{m=1}^{\infty} (i/k)^m f_{m-1}(a) - \frac{e^{ikS(b)}}{S'(b)} \sum_{m=1}^{\infty} (i/k)^m f_{m-1}(b), \quad (3.68)$$

où $f_0(\xi) = f(\xi)$. Dans notre cas, puisque selon l'équation (3.62), $a=0$ et $b \rightarrow \infty$, on ne s'occupe pas des termes contenant b dans l'équation (3.68). On cherche donc la contribution du bord $\xi=a=0$, et on remplace, dans l'équation (3.68), la fonction de phase par :

$$S(\xi) = \xi \cos \varphi_0 + \sqrt{(x_1 - \xi)^2 + x_2^2}, \quad (3.69)$$

où $S(0) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = r$; la fonction de poids sur le bord est

$$f(\xi=0) = \frac{\sin \varphi_r}{[(x_1 - \xi)^2 + x_2^2]^{1/4}} \Big|_{\xi=0} = \frac{\sin(\pi - \varphi)}{\sqrt{r}} = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{r}}, \quad (3.70)$$

où $\theta_r(\xi=0) = \pi - \varphi$ (Figure 3-14), et où la dérivée de la fonction de phase est donnée par (3.63) :

$$S'(\xi=0) = \cos \varphi_0 - \cos \varphi_r \Big|_{\xi=0} = \cos \varphi_0 - \cos(\pi - \varphi) = \cos \varphi_0 + \cos \varphi. \quad (3.71)$$

Après avoir identifié tous les éléments nécessaires, on trouve la contribution de l'intégrale (3.62) sur $\xi=0$ en prenant en compte le premier terme de l'asymptotique (3.68) :

$$\begin{aligned} u_3^{\text{sc}}(\xi=0) &\simeq -A_0 \sqrt{\frac{k}{2i\pi}} \cdot \left[\frac{e^{ikS(0)}}{S'(0)} \sum_{m=1}^{\infty} (i/k)^m f_{m-1}(0) \right] \Big|_{m=1} = -A_0 \sqrt{\frac{k}{2i\pi}} \cdot \frac{e^{ikr}}{\cos \varphi_0 + \cos \varphi} \frac{i \sin \varphi}{k \sqrt{r}} \\ &= -A_0 \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi_0 + \cos \varphi} \frac{e^{i(kr + \pi/4)}}{\sqrt{2\pi k r}}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

L'expression (3.72) représente le champ diffracté u_3^{sc} par l'arête ($x_1=0, x_2=0$) du demi-plan prédit par le développement asymptotique de l'intégrale de Kirchhoff. On peut extraire le coefficient de diffraction D^{KA} correspondant à partir de cette équation :

$$u_3^{sc}(\xi=0) \simeq -A_0 \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi_0 + \cos \varphi} \frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{\sqrt{2\pi kr}} = D^{KA} A_0 \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}, \quad (3.73)$$

avec
$$D^{KA} = -\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k}} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi_0 + \cos \varphi} = -\frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi k}} \left(\tan \frac{\varphi + \varphi_0}{2} + \tan \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right).$$

Ce coefficient de diffraction obtenu à l'issue du développement asymptotique non-uniforme a deux points de singularité aux frontières d'ombre : $\varphi = \pi \pm \varphi_0$, qui se situent donc exactement aux mêmes directions d'observation que les singularités du coefficient de diffraction de la GTD : (3.24) et (3.25). Le champ total u^t prédit par le développement asymptotique de l'approximation de Kirchhoff est donné par la sommation du résultat de l'intégrale et du champ incident :

$$u^t \simeq u^i + u_1^{sc} + u_2^{sc} + u_3^{sc} = H(\xi)u^i + u_1^{sc} + u_3^{sc} = H(\xi)u^i + u^r + u_{KA}^d \quad (3.74)$$

$$= u^g + u_{KA}^d$$

où $H(\xi)$ est l'Heaviside et où le champ u_2^{sc} s'annule avec le champ incident dans la zone d'ombre ; nous avons par ailleurs identifié le champ u_1^{sc} comme correspondant exactement au champ réfléchi du champ géométrique de l'OG et donc de la GTD. Le champ u_3^{sc} est donc le champ diffracté par le bord du demi-plan u_{KA}^d , il a la même structure que celui modélisé par la GTD mais avec un coefficient de diffraction différent.

3.4.1.2 Cas d'un dièdre

Dans le cas d'un dièdre, les champs géométriques et les champs diffractés contribuant à l'intégrale de Kirchhoff, vus précédemment, n'ont pas exactement la même structure que celle rencontrée dans le cadre de la GTD (voir les équations de (3.8) à (3.16) et la Figure 3-5), notamment en raison du champ symétrique u_2^{sc} créé côté opposé à la surface éclairée et en raison de coefficients de diffraction différents associés à la surface supérieure ($\varphi=0$) et associés à la surface inférieure ($\varphi=\Phi$) :

$$D^{KA+} = -\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k}} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi_0 + \cos \varphi}, \quad (3.75)$$

et

$$D^{KA-} = -\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k}} \frac{\sin(\Phi - \varphi)}{\cos(\Phi - \varphi_0) + \cos(\Phi - \varphi)}. \quad (3.76)$$

Si les deux surfaces du dièdre sont éclairées par l'onde incidente $\Phi - \pi < \varphi_0 < \pi$, le coefficient de diffraction par le sommet du dièdre correspondant D_*^{KA} est obtenu par la sommation de deux coefficients de diffraction associés à l'intégrale sur les deux faces du dièdre

$$D_*^{KA} = D^{KA+} + D^{KA-} = -\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi k}} \left[\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi_0 + \cos \varphi} + \frac{\sin(\Phi - \varphi)}{\cos(\Phi - \varphi_0) + \cos(\Phi - \varphi)} \right], \quad (3.77)$$

où les singularités de ce coefficient se trouvent aux frontières d'ombre des champs réfléchis sur les deux surfaces : $\varphi = \pi \pm \varphi_0$ et $\varphi = 2\Phi - \pi - \varphi_0$.

Listons maintenant les contributions de l'intégrale de Kirchhoff, comme nous l'avons fait pour la GTD dans §3.2.1. Si l'onde incidente n'éclaire que la surface supérieure du dièdre

(voir la Figure 3-5-a) où $\varphi_0 < \Phi - \pi$, on a une onde réfléchie $u_1^{\text{sc}} = A_0 e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)}$ sur la surface $\varphi = 0$ et une onde symétrique $u_2^{\text{sc}} = -A_0 e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)}$ créée dans la zone $\pi + \varphi_0 < 2\pi$ qui est annulée par l'onde incidente ; le champ diffusé u^{dif} s'écrit donc :

$$u^{\text{dif}} = D^{\text{KA}+} A_0 \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} + \begin{cases} A_0 e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} & \text{avec } 0 \leq \varphi \leq \pi - \varphi_0, \\ 0 & \text{avec } \pi - \varphi_0 < \varphi \leq \pi, \end{cases} \quad (3.78)$$

$$u^{\text{dif}} = D^{\text{KA}+} A_0 \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} + \begin{cases} 0 & \text{avec } \pi \leq \varphi \leq \pi + \varphi_0, \\ -A_0 e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} & \text{avec } \pi + \varphi_0 < 2\pi. \end{cases} \quad (3.79)$$

Si l'onde éclaire l'autre surface (voir la Figure 3-5-c) du dièdre $\varphi = \Phi$, les contributions du champ diffusé u^{dif} sont également données par les équations (3.78) et (3.79) en remplaçant φ par $\Phi - \varphi$, φ_0 par $\Phi - \varphi_0$ et $D^{\text{KA}+}$ par $D^{\text{KA}-}$. Si l'onde incidente éclaire les deux surfaces du dièdre (voir la Figure 3-5-b), dans ce cas $\varphi_0 < \Phi - \pi$, le champ diffusé u^{dif} s'écrit :

$$u^{\text{dif}} = (D^{\text{KA}+} + D^{\text{KA}-}) A_0 \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} + A_0 e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} \quad \text{avec } 0 \leq \varphi \leq \pi - \varphi_0, \quad (3.80)$$

$$u^{\text{dif}} = (D^{\text{KA}+} + D^{\text{KA}-}) A_0 \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \quad \text{avec } \Phi - \pi < \varphi < 2\Phi - \pi - \varphi_0, \quad (3.81)$$

$$u^{\text{dif}} = (D^{\text{KA}+} + D^{\text{KA}-}) A_0 \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} + A_0 e^{-ikr \cos(2\Phi - \pi - \varphi_0)} \quad \text{avec } 2\Phi - \pi - \varphi_0 \leq \varphi \leq \Phi. \quad (3.82)$$

Cette dernière analyse montre les différentes contributions asymptotiques de l'intégrale de Kirchhoff quand on calcule le champ de diffraction sur un dièdre avec cette méthode. En comparant avec la structure du champ calculé par la GTD pour un demi-plan ou un dièdre, on trouve que les coefficients de diffraction du sommet de la GTD et de KA sont différents. En effet l'erreur de KA lors de la prédiction du champ diffracté, constatée en Figure 3-15, Figure 3-16 et Figure 3-17, est due à cette différence. Nous allons dans la partie suivante corriger cette différence afin d'améliorer la prédiction par KA de la diffraction par une arête.

3.4.2 Correction de KA à l'aide de la GTD

Après une décomposition asymptotique de l'intégrale de Kirchhoff, nous avons identifié les différentes contributions de KA, notamment une partie correspondant au champ de réflexion et une partie de diffraction par l'arête. Le champ de réflexion ainsi identifié à l'aide du développement asymptotique est identique à celui donné par la GTD. En revanche, le champ de diffraction par le bord a un coefficient de diffraction différent de celui de la GTD, sachant que le coefficient de la GTD dérive du développement asymptotique de la solution exacte. Nous pouvons donc conclure que c'est cette différence du champ diffracté qui crée l'erreur de KA que l'on a constatée en Figure 3-17. L'idée du raffinement de KA est issue de la théorie physique de diffraction (PTD) initialement proposée par Ufimtsev [67], qui consiste à corriger l'erreur de KA dans la prédiction du champ diffracté en remplaçant le champ diffracté de KA u_{KA}^{d} donné par l'équation (3.73), par le champ diffracté de la GTD u^{d} (3.19) avec le coefficient de diffraction (3.25) :

$$u^{\text{RKA}} \simeq u^{\text{g}} + u_{\text{KA}}^{\text{d}} - u_{\text{KA}}^{\text{d}} + u^{\text{d}} = u^{\text{KA}} + (u^{\text{d}} - u_{\text{KA}}^{\text{d}}), \quad (3.83)$$

où la différence des champ diffracté $(u^{\text{d}} - u_{\text{KA}}^{\text{d}})$ est donc le terme correctif. Comme nous avons remarqué que le champ diffracté contribuant à l'intégrale de Kirchhoff possède la même structure que celle du champ obtenu par la GTD, cette différence du champ diffracté est donc bien liée à la différence du coefficient de diffraction par le bord. La correction de KA consiste donc à la recherche de cette différence du coefficient.

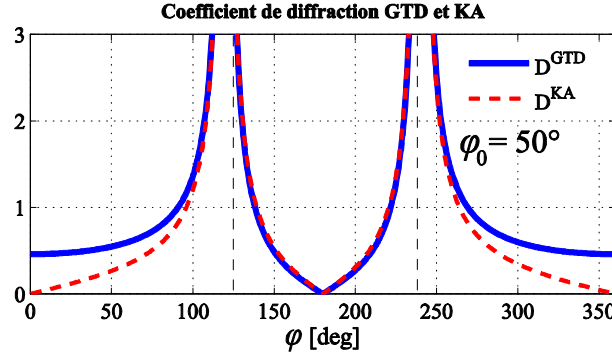


Figure 3-19 : Comparaison des coefficients de diffraction en fonction de l'angle d'observation φ pour un angle incident $\varphi_0 = 50^\circ$, avec $f = 1\text{MHz}$, $c = 2472\text{m/s}$, $\lambda = 1.5\text{mm}$ ($k=2541$).

Nous avons illustré en Figure 3-19 l'évolution en fonction de l'angle d'observation φ des deux coefficients de diffraction du demi-plan rigide (condition limite Neumann) avec un angle incident $\varphi_0 = 50^\circ$. Cette comparaison montre que les deux coefficients ont exactement les mêmes singularités, ils tendent vers l'infini sur les deux frontières d'ombre ($\varphi = \pi \pm \varphi_0$). De ce fait, si nous soustrayons D^{KA} de D^{GTD} , nous pouvons à la fois trouver la correction du champ de diffraction pour l'approximation de Kirchhoff et aussi espérer effacer les singularités des coefficients de diffraction. Le coefficient de correction pour le demi-plan est donc donné par :

$$D^{\text{Corr}} = D^{\text{GTD}} - D^{\text{KA}} = \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi k}} \left(\frac{\sin((\varphi - \varphi_0)/2) - 1}{\cos((\varphi - \varphi_0)/2)} + \frac{\sin((\varphi + \varphi_0)/2) - 1}{\cos((\varphi + \varphi_0)/2)} \right). \quad (3.84)$$

En faisant cette dernière soustraction, nous pouvons réussir à supprimer complètement les singularités existantes dans les coefficients D^{GTD} et D^{KA} et donner des résultats finis dans toutes les directions (pour certaines directions spécifiques, les valeurs sont définies dans la référence [67], pages : 74-75). Le résultat de cette différence est illustré en Figure 3-18.

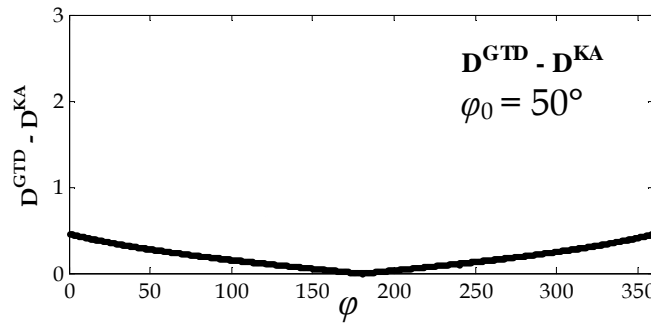


Figure 3-20 : Différence entre les coefficients de diffraction de la GTD et de la KA, avec $f = 1\text{MHz}$, $c = 2472\text{m/s}$, $\lambda = 1.5\text{mm}$ ($k=2541$).

Selon la relation (3.83), le modèle de Kirchhoff raffiné est finalement obtenu par la somme de l'intégrale de Kirchhoff et d'un champ de diffraction de bord associé au coefficient de correction :

$$u^{\text{RKA}} = u^{\text{KA}} + (u^{\text{d}} - u_*^{\text{d}}) = u^{\text{KA}} + D^{\text{corr}} A_0 \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}. \quad (3.85)$$

Les résultats montrés en Figure 3-21 fournis par ce nouveau modèle u^{RKA} sont parfaitement cohérents avec la solution exacte dans toutes les directions d'observation. Avec le modèle Kirchhoff raffiné, nous avons pu à la fois corriger le champ de diffraction du

modèle de Kirchhoff (voir la Figure 3-15) et effacer les singularités du modèle GTD (voir la Figure 3-9) en conservant les avantages des deux modèles.

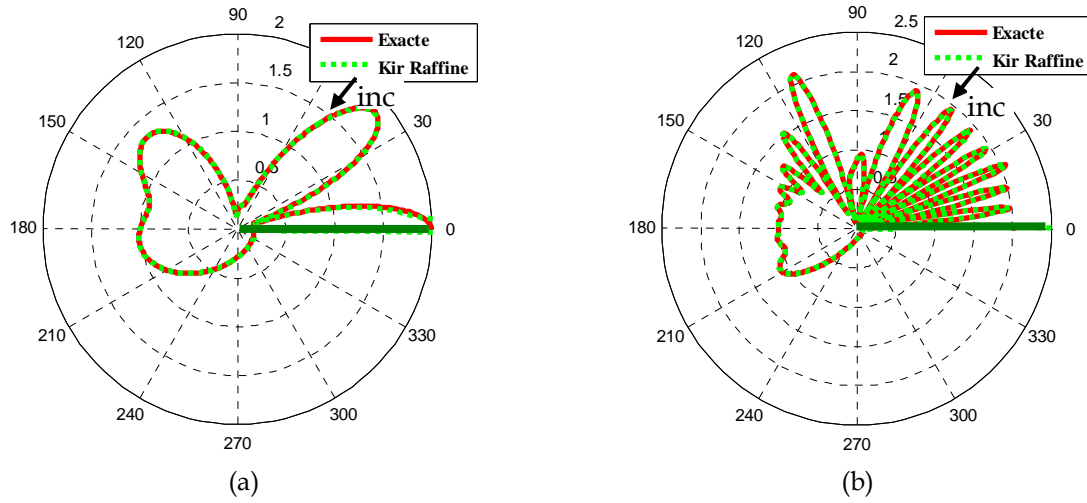


Figure 3-21 : Diagrammes de directivité d'amplitude absolue de la diffraction par un plan semi-infini calculés par l'approximation Kirchhoff raffiné (en vert) et avec la solution exacte (en rouge) avec $f=1\text{MHz}$, $c=2472\text{m/s}$, $\lambda=1.5\text{mm}$ ($k=2541$), $\varphi_0=50^\circ$ et (a) : $r=1\lambda$, (b) : $r=5\lambda$.

Nous avons réalisé un calcul du champ total dans un espace 2D avec le modèle Kirchhoff raffiné afin de valider ce modèle dans tout l'espace. Le champ de diffraction est bien visible dans la zone d'ombre. Les comparaisons des erreurs des modèles Kirchhoff et Kirchhoff raffiné par rapport à la solution exacte sont représentés en Figure 3-22.

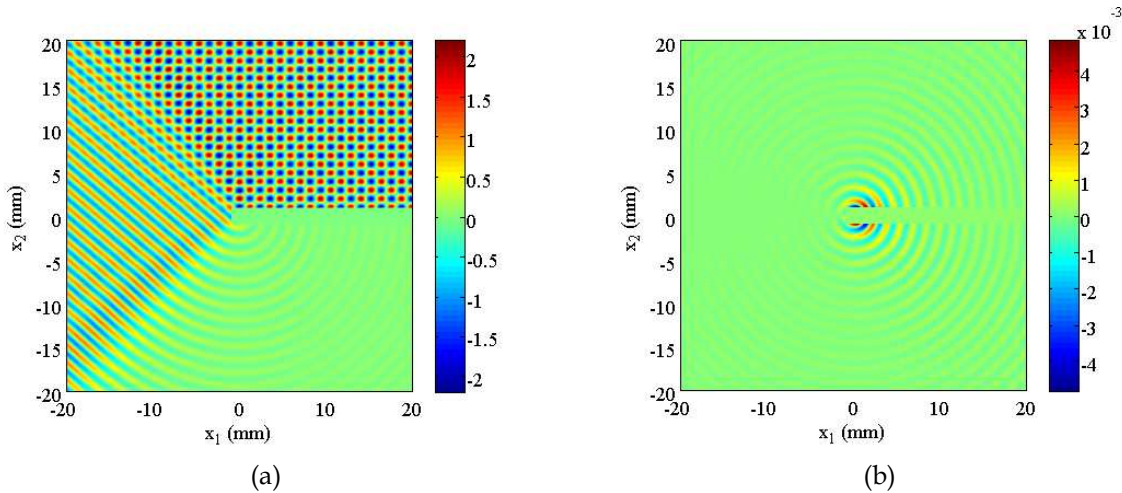


Figure 3-22 : (a) champ total calculé avec KA raffiné dans un espace 2D en milieu sodium liquide avec $f=1\text{MHz}$, $c=1500\text{m/s}$, $\lambda=1.5\text{mm}$ ($k=4188$) et $\varphi_0=50^\circ$; (b) erreur normalisée de la prédiction de KA raffiné par rapport à la solution exacte.

Comme nous pouvons le constater, les erreurs sont largement réduites grâce au raffinement de KA par rapport à celles de KA (en Figure 3-17) : l'erreur maximale normalisée passe de 0,1 à 0,004, et cette amélioration se trouve surtout en champ proche dans le cas acoustique. En revanche, cette étude nous a poussé à étendre le modèle développé à l'élastodynamique, dans ce cas là, le modèle KA raffiné permet d'améliorer la prédiction de KA d'une dizaine de dB en ondes T dans certaines configurations.

3.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons d'abord étudié deux modèles classiques de diffraction : la théorie géométrique de diffraction (GTD) et l'approximation de Kirchhoff (KA). Les modèles

ont été appliqués pour résoudre les problèmes de diffraction des ondes acoustiques sur un demi-plan et un dièdre parfaitement rigide.

La GTD est une extension de la théorie d'acoustique géométrique qui ajoute les rayons diffractés par les arêtes de l'objet, et le champ de diffraction est alors obtenu par le développement asymptotique de la solution exacte de Sommerfeld. Cependant, le développement asymptotique n'est pas valable près des frontières d'ombre où le champ de diffraction prédit par la GTD tend vers l'infini. Pour éliminer cette limitation, deux modèles de diffraction uniformes ont été étudiés : la théorie uniforme de la diffraction (UTD) et la théorie asymptotique uniforme (UAT). Ces deux méthodes fournissent des solutions uniformes dans tout l'espace ; dans notre cas d'étude, l'UTD et l'UAT fournissent des résultats équivalents et valides. Nous avons choisi l'UTD comme la référence en validation théorique lorsqu'une solution exacte n'est pas disponible, en raison de sa simplicité par rapport à l'UAT.

L'approximation de Kirchhoff (KA) est une approximation fondée sur une formulation intégrale du champ de surface excité par l'onde incidente. En utilisant cette approximation, les champs de diffraction par un demi-plan et par un dièdre ont été calculés. KA nous a fourni des solutions précises pour le champ de réflexion spéculaire, en revanche, l'amplitude du champ diffracté par une arête n'est pas rigoureusement correcte. Afin de corriger cette erreur, nous avons d'abord identifié dans KA la contribution du champ de diffraction en faisant le développement asymptotique de l'intégrale de Kirchhoff, ce qui permet d'extraire un coefficient de diffraction de Kirchhoff. Ensuite, nous avons développé un modèle de Kirchhoff raffiné à l'aide de la théorie physique de diffraction (PTD). Ce modèle consiste à corriger le champ de diffraction calculé par KA par celui de la GTD. L'erreur de KA a été largement réduite après le raffinement.

Cependant, tous les modèles étudiés dans ce chapitre sont valables uniquement pour une cible parfaitement rigide, et non pour une cible impédante. Nous allons étudier dans le chapitre suivant une condition aux limites représentative d'une cible impédante, et développer ensuite des modèles valables pour ces nouvelles conditions aux limites.

4

MODELISATION DE L'INTERACTION ENTRE UN FAISCEAU ACOUSTIQUE ET UNE CIBLE ELASTIQUE

Au chapitre précédent, nous avons étudié l'interaction entre un faisceau acoustique et une cible rigide afin de pouvoir calculer le champ diffusé par un demi-plan ou un dièdre parfaitement rigide. Deux catégories de méthodes ont été étudiées, la théorie géométrique de la diffraction (GTD) et l'approximation de Kirchhoff (KA) ; elles sont fondées sur des principes différents mais fournissent des résultats similaires. Un modèle hybride a été développé en combinant la GTD et la KA de sorte à ne conserver les avantages des deux approches. Ce chapitre est un complément du précédent et a pour but de prendre en compte, dans le calcul du champ diffusé, des conditions aux limites plus représentatives des cibles rencontrées en télémétrie. Nous considérons en effet, dans le chapitre précédent, des cibles constituées de matériaux durs avec une impédance acoustique largement supérieure à celle du milieu fluide. Cependant, dans notre cas d'étude, les cibles immergées dans le sodium liquide sont en acier inoxydable supposé isotrope, et les ondes incidentes ne sont donc pas totalement réfléchies à l'interface ; elles donnent en effet naissance à trois types d'onde : l'onde longitudinale réfléchie, l'onde longitudinale transmise et transversale transmise.

Dans ce chapitre, nous nous proposons de tenir compte de la réflectivité partielle des cibles d'impédance finie en introduisant le coefficient de réflexion pour une onde plane incidente dans le calcul des champs diffusés. Par comparaison avec un réflecteur rigide, la GTD peut être alors étendue comme suit : le champ géométrique de réflexion spéculaire (OG) est dans ce cas simplement multiplié par le coefficient de réflexion, et l'amplitude du champ diffracté par les arêtes est modifiée par l'incorporation d'une fonction spéciale qui permet de corriger le coefficient de diffraction de la GTD. Pour l'approximation de Kirchhoff, on va montrer que le champ diffusé par une surface d'impédance finie est une combinaison linéaire du champ généré sur une surface rigide et de celui généré sur une surface molle. La répartition relative de ces deux types de champ est déterminée à l'aide du coefficient de réflexion. Une formule générale de l'approximation de Kirchhoff est ainsi développée, valable pour une surface d'impédance finie. En appliquant la technique de développement asymptotique présentée au chapitre 3, nous allons séparer les deux contributions (part géométrique et de diffraction) de l'intégrale de Kirchhoff générale ; le coefficient de diffraction de Kirchhoff dans le cas d'une surface d'impédance finie est obtenu. Enfin, nous proposons une technique de raffinement pour corriger l'erreur du champ de diffraction prédit par le modèle de Kirchhoff.

4.1 INTRODUCTION

On considère une onde incidente à la surface d'une structure immergée dans un milieu homogène. On sait que les propriétés du champ résultant de la diffusion de cette onde sont fortement liées à la géométrie de la structure, aux propriétés du matériau la constituant ainsi qu'aux caractéristiques du milieu de propagation. Ainsi, en utilisant une condition aux limites à l'interface entre le milieu de propagation et la structure immergée, on peut décrire l'influence des propriétés des matériaux sur le champ diffusé. On prêter une attention particulière à déterminer une condition aux limites représentative des cibles utilisées en télémétrie sous sodium, afin d'obtenir des résultats corrects dans la simulation de l'interaction entre l'onde et la structure. Dans le cas de la télémétrie, les essais expérimentaux en laboratoire (décrits au Chapitre 5) sont réalisés tout d'abord dans l'eau à température ambiante homogène avant de passer les essais en sodium liquide à température de 200°C homogène.

Cependant, déterminer cette condition aux limites, en se basant uniquement sur les propriétés des matériaux considérés est loin d'être facile, et différents types d'approximation existent. Dans le cadre des ondes acoustiques, les conditions aux limites classiques sont celles de Dirichlet et de Neumann (voir les références [77, 67, 70, 79]). Lorsqu'une onde acoustique se propage dans un milieu fluide et rencontre une interface qui sépare ce milieu de propagation d'un autre milieu, la condition de Dirichlet représente une interface souple (ou « molle » ; par exemple la surface d'un océan entre l'eau et l'air) où le potentiel de vitesse toujours noté u par souci de simplification (défini par l'équation (3.2)) est nul

$$u = 0, \quad (4.1)$$

ce qui correspond à une pression acoustique nulle sur cette interface. Au contraire, sur une interface parfaitement rigide (dure), la composante normale de la célérité à l'interface est nulle, ce qui amène la condition de Neumann :

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (4.2)$$

où \mathbf{n} est la normale sortante à l'interface.

Nous avons adopté, dans le chapitre précédent, la condition de Neumann en considérant que les cibles immergées dans le sodium étaient parfaitement rigides, car cette approximation simplifie largement les solutions analytiques du problème. Dans ce chapitre, une condition aux limites plus précise est employée au §4.2 pour prédire l'influence de la nature élastique des cibles sur les échos reçus. En effet, comme les deux conditions classiques précédemment évoquées représentent deux situations extrêmes (mou/dur), une condition aux limites mixte (voir référence [79]), s'appliquant à une onde monochromatique, est pertinente :

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - ik \frac{Z_0}{Z} u = 0, \quad (4.3)$$

où $Z_0 = \rho_0 c_0$ est l'impédance caractéristique du milieu fluide de propagation, produit de la masse volumique ρ_0 et de la célérité du son c_0 , et où Z est l'impédance de la cible. Cette condition aux limites mixte est donc caractérisée par le rapport des impédances qui est l'admittance normalisée $\sin \theta$ du matériau :

$$\sin \theta = \frac{Z_0}{Z}, \quad (4.4)$$

θ pouvant être complexe. Le coefficient de réflexion R à une interface quelconque peut être déterminé à partir de l'admittance $\sin \theta$ ainsi que de l'angle incident θ_0 :

$$R(\varphi_0) = \frac{\sin \varphi_0 - \sin \theta}{\sin \varphi_0 + \sin \theta}. \quad (4.5)$$

Le coefficient de réflexion modifie l'amplitude et la phase de l'onde réfléchi à l'interface et permet de prédire l'influence des propriétés du matériau sur l'écho de rétrodiffusion. Nous allons étudier au §4.2 le coefficient de réflexion à l'interface fluide/solide élastique.

Une fois ces conditions déterminées pour des cibles d'impédance finie, les formules analytiques des solutions du champ diffusé par les cibles présentées au chapitre précédent doivent être modifiées afin de les adapter à ces conditions limites. Pour le problème de la diffraction par un dièdre d'impédance finie, la solution exacte a été trouvée par Malyuzhinets [80], qui a modifié l'intégrale de Sommerfeld (solution exacte de la diffraction par un dièdre rigide ou mou) en introduisant une fonction spéciale, appelée fonction de Malyuzhinets, qui contient les informations relatives à l'admittance du matériau considéré. Indépendamment, Williams [81] a réalisé des travaux similaires à ceux de Malyuzhinets à l'aide de l'introduction de la fonction gamma dans l'intégrale de Sommerfeld pour obtenir la solution exacte. Senior [82] a quand à lui utilisé la transformée de Laplace pour proposer une solution exacte de la diffraction par un dièdre de conductivité finie dans le cadre de l'électromagnétisme.

En faisant le développement asymptotique de l'intégrale de Sommerfeld-Malyuzhinets, les différentes contributions majeures de l'intégrale ont été obtenues par Senior [83] : le champ géométrique, le champ diffracté par l'arête du dièdre et une contribution supplémentaire par rapport au cas rigide, cette dernière représentant les ondes de surface générées le long des surfaces du dièdre. Nous présenterons au §4.3, les modifications par la fonction de Malyuzhinets des coefficients de diffraction de l'arête du dièdre (dans le cadre des solutions GTD non-uniforme et uniforme). Pierce et Hadden Jr [84] ont simplifié le développement asymptotique de la solution de Williams et développé un modèle GTD valide pour la diffraction d'une onde plane acoustique par un dièdre quasi rigide (faible admittance).

Comme nous l'avons présenté au §3.3, l'approximation de Kirchhoff (KA), fondée sur une équation intégrale, considère le champ diffusé par une surface comme étant la somme des contributions des champs de surface réémis par cette surface. Si la surface est parfaitement rigide (condition de Neumann), seule la pression acoustique contribue au champ de surface ; dans le cas de la condition Dirichlet, cette pression est remplacée par la vitesse des particules. Dans le cas d'une surface d'impédance finie (condition mixte (4.3)), les deux types de contribution (mou/dur) sont combinées à l'aide du coefficient de réflexion et enfin nous permettent de déduire l'intégrale de Kirchhoff « générale ». En utilisant le développement asymptotique de cette nouvelle intégrale, nous identifierons le coefficient de diffraction de Kirchhoff de l'arête du dièdre dans le cas impédant.

La théorie physique de diffraction (PTD), avec laquelle nous avons développé KA raffiné dans le précédent chapitre, a été étudiée par de nombreux auteurs cherchant à l'appliquer au cas d'une structure d'impédance finie. Dans le domaine de l'électromagnétisme, Ryan et Peters [85] ont développé la méthode des courants équivalents ; cette méthode a ensuite été améliorée par Michaeli [86, 87]. Une autre méthode similaire, appelé le coefficient de diffraction incrémental (*Incremental Length Diffraction Coefficient*) a été initialement proposée par [88], puis étudiée par Knott [89] et Pelosi *et al.* [90]. En dernière partie de ce chapitre nous proposons une nouvelle approche du raffinement de la KA.

4.2 LES CONDITIONS AUX LIMITES NON PARFAITEMENT REFLECHISSANTES

Nous définissons d'abord l'impédance acoustique d'une surface, à partir de laquelle, nous pouvons déduire différents types de conditions aux limites. Ensuite, le coefficient de réflexion à l'interface liquide/solide va être développé en écrivant les équations de continuité de déplacement et de contrainte à l'interface. Ce coefficient de réflexion est ensuite appliqué ultérieurement pour le calcul des champs diffusés par une cible d'impédance finie.

4.2.1 Impédance acoustique

Pour un milieu de propagation donné, la nature du matériau constituant un obstacle joue un rôle important dans le mécanisme de formation de l'écho qu'il peut générer. Dans le chapitre précédent, nous avons ainsi fait l'hypothèse que le matériau des obstacles est parfaitement rigide et que les ondes sont totalement réfléchies sur leurs interfaces. Cependant, pour résoudre notre problème avec une condition aux limites plus représentative de la situation considérée (l'interface sodium/acier), nous nous intéressons d'abord à une plaque de surface non parfaitement réfléchissante. Cette plaque est modélisée (selon Bruneau [79]) par une plaque rigide se déplaçant suivant l'axe x_1 avec une vitesse V_0 , et recouverte, dans l'espace $[-\delta, 0]$, d'un matériau élastique et résistif caractérisé par son impédance acoustique Z (voir la Figure 4-1).

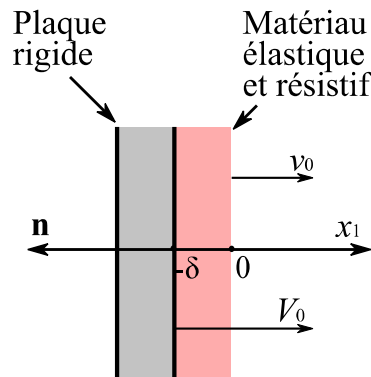


Figure 4-1 : Plaque rigide recouverte par un matériau élastique et résistif, constituant une condition limite non parfaite.

L'impédance acoustique de l'ensemble de la plaque recouverte considérée Z (Figure 4-1) est le rapport de la pression p_0 à laquelle est soumise sa surface en contact avec le fluide ($x_1 > 0$) et de la vitesse de variation de son épaisseur $[V_0 - v_0]$, où v_0 représente la vitesse de déplacement suivant la direction x_1 du matériau élastique résistif à l'interface matériau/fluide en $x_1 = 0$:

$$Z = \frac{p_0}{V_0 - v_0}. \quad (4.6)$$

Faisant usage de la transformée de Fourier de l'équation d'Euler, hors des sources,

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} \approx -\frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad (4.7)$$

où ρ_0 est la masse volumique du fluide homogène, où v_1 représente la vitesse particulière acoustique (la vitesse de déplacement des particules du milieu de propagation autour d'une

position d'équilibre) selon la direction x_1 , la vitesse v_0 de déplacement au point $x_1 = 0$ peut être exprimée sous la forme :

$$v_0 = \frac{-\partial p / \partial x_1}{i\omega\rho_0} = \frac{\partial p / \partial \mathbf{n}}{i\omega\rho_0}, \quad (4.8)$$

où \mathbf{n} représente la normale sortante au domaine considéré ($x_1 > 0$, Figure 4-1). Substituons la relation (4.8) dans la définition (4.6) de l'impédance Z du matériau, nous avons donc :

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} + ik \sin \theta p = V_0, \quad \text{en } x_1 = 0, \quad (4.9)$$

où $\sin \theta = \rho_0 c_0 / Z$ est l'admittance normalisée du matériau, avec $\rho_0 c_0$ est l'impédance caractéristique du milieu de propagation, et où $k = \omega / c_0$ est le nombre d'onde.

Dans le cas particulier, si le matériau du revêtement est un solide parfaitement rigide (hypothèse faite pour toutes les conditions aux limites dans le chapitre 3), $v_0 = 0$ donc $Z \rightarrow \infty$, c'est donc une surface parfaitement réfléchissante, soit $\theta = 0$; la condition prend alors la forme d'une condition dite de Neumann

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \text{en } x_1 = 0. \quad (4.10)$$

A l'inverse, si l'onde se propage dans un milieu dense (solide par exemple), à l'interface avec un milieu gazeux, la force de réaction du gaz reste le plus souvent négligeable, ce qui traduit par une condition dite de Dirichlet où $Z \rightarrow 0$ (l'admittance $\sin \theta$ tend vers l'infini dans l'équation (4.9)) D'après la relation (4.6) ou (4.9), on a alors une pression acoustique nulle à l'interface :

$$p = 0 \quad \text{en } x_1 = 0. \quad (4.11)$$

Si la plaque rigide est fixée ($V_0 = 0$), on a donc $Z = -p_0 / v_0$, et l'équation (4.9) prend la forme d'une condition aux limites homogènes mixtes composée d'une partie en condition de Neumann et d'une partie en condition de Dirichlet :

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} + ik \sin \theta p = 0, \quad \text{en } x_1 = 0; \quad (4.12)$$

Nous avons déduit la condition aux limites sous une forme générale (4.9) dans le cadre de l'acoustique. A partir de cette condition aux limites générale, nous avons retrouvé les différentes conditions aux limites classiques dans les cas extrêmes : la condition de Neumann (surface rigide) et la condition de Dirichlet (surface molle). En effectuant la combinaison linéaire de ces deux conditions extrêmes, nous obtenons la condition aux limites homogènes mixte (4.12), une condition aux limites plus générale qu'on va utiliser dans ce chapitre. Les poids relatifs de la combinaison linéaire sont fixés par l'admittance $\sin \theta$, qui peut être écrite en fonction du coefficient de réflexion R à l'aide de la relation (4.5). Le coefficient de réflexion permet de décrire le changement de l'amplitude et de la phase après la réflexion à l'interface et peut être complexe pour une interface fluide/solide. Nous allons déterminer le coefficient de réflexion à l'interface fluide/solide dans la section suivante.

4.2.2 Coefficient de réflexion à l'interface fluide/solide

La réflexion d'une onde à une interface est caractérisée par le coefficient de réflexion avec lequel, nous espérons prendre en compte l'influence, sur le champ de réflexion, des propriétés acoustiques des matériaux constituant l'interface. Le coefficient de réflexion R à l'interface fluide/solide [38] est donné par :

$$R = \frac{C - \zeta}{C + \zeta}, \quad \text{avec } \zeta = \frac{\rho_0 c_0 \cos \alpha^L}{\rho_s c_L \cos \alpha}, \quad C = \cos^2 2\alpha^T + \sin 2\alpha^L \cdot \sin 2\alpha^T \left(\frac{c_T}{c_L} \right)^2, \quad (4.13)$$

où l'angle incident α^I (voir la Figure 4-2) et l'angle réfléchi α^R sont égaux : $\alpha = \alpha^I = \alpha^R$, où les angles réfractés α^L et α^T sont reliés à α par les lois de Snell-Descartes. Le milieu fluide est caractérisé par la masse volumique ρ_0 et la vitesse du son c_0 , et le milieu solide isotrope est caractérisé par la masse volumique ρ_s ainsi que par les vitesses des ondes longitudinale c_L et transversale c_T .

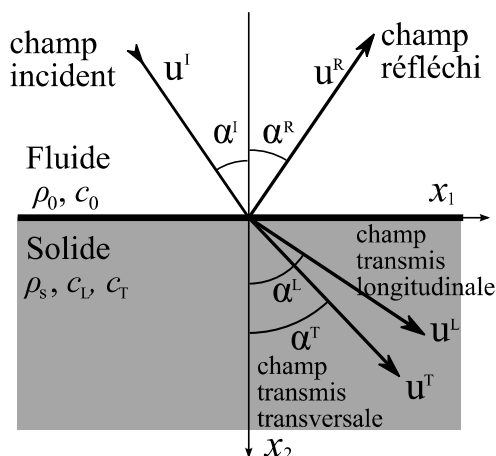


Figure 4-2 : Interface liquide-solide isotrope

Dans notre cas d'étude, les cibles à inspecter sont en acier inoxydable (selon Imbert [91]), immergées dans l'eau (conditions de certaines expériences en laboratoire) ou en sodium liquide à 200°C (conditions de la maintenance du réacteur hors service). Les célérités du son et les masses volumiques des matériaux considérés sont détaillées dans le Tableau 4-1.

Milieu	ρ (kg/m ³)	c_L (m/s)	c_T (m/s)
Eau	1000	1480	0
Sodium à 200°C	904	2472	0
Acier inox.	7900	5790	3100
Acier inox. à 200°C	7880	5393	3038

Tableau 4-1 : Célérités du son et masses volumiques des matériaux considérés.

Les modules et les phases des coefficients de réflexion R (calculés à l'aide de l'équation (4.13)), à l'interface eau/acier et à l'interface sodium/acier à 200°C sont tracés en Figure 4-3 dans le cas d'une onde plane monochromatique. Dans les deux cas, le premier pic ($\sim 15^\circ$ pour eau/acier, $\sim 27^\circ$ pour sodium/acier) correspond à l'angle critique longitudinal $\alpha_c^L = \arcsin(c_0/c_L)$, le début du palier $|R| = 1$ (réflexion totale), correspond au deuxième angle critique de l'onde transversal ($\sim 29^\circ$ pour eau/acier, $\sim 54^\circ$ pour sodium/acier) $\alpha_c^T = \arcsin(c_0/c_T)$. Le grand pic de la phase dans les deux cas correspond à l'angle critique de l'onde de Rayleigh ($\sim 30^\circ$ pour eau/acier, $\sim 60^\circ$ pour sodium/acier). La comparaison des coefficients dans les deux cas permet de constater que la différence des célérités entre les deux milieux fluides modifie le comportement du coefficient de réflexion.

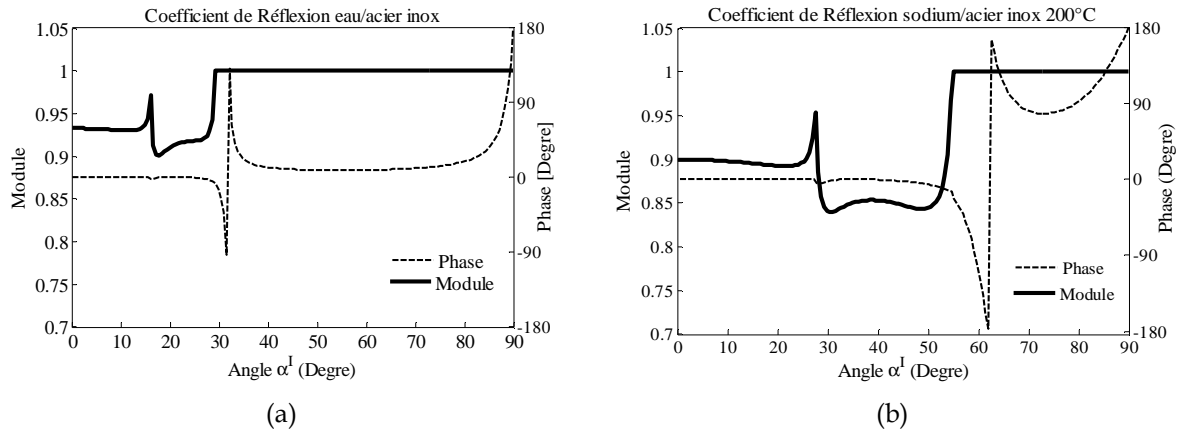


Figure 4-3 : Coefficients (module et phase) de réflexion en termes de potentiel de vitesse : (a) à l'interface eau/acier inox. ; (b) à l'interface sodium/acier inox. 200°C.

Nous avons étudié le coefficient de réflexion à l'interface sodium/acier inoxydable. Ce coefficient est complexe ; il décrit à la fois le changement d'amplitude et aussi de phase lors de la réflexion d'une onde plane sur cette interface. En utilisant la relation (4.5), on obtient une admittance $\sin \theta$ complexe à partir du coefficient de réflexion d'onde plane à l'interface fluide/solide obtenu. Cette admittance associée à l'interface considérée sera employée par la suite dans le calcul du champ diffusé par une cible d'impédance finie.

4.3 THEORIES GEOMETRIQUES DE LA DIFFRACTION AVEC CONDITIONS AUX LIMITES HOMOGENES MIXTES

Nous avons calculé dans la partie précédente, le coefficient de réflexion à l'interface liquide/solide qui prend en compte l'influence de l'élasticité de la cible en acier sur l'onde réfléchi à cette interface, ce qui a également une influence sur les ondes diffractées par les arêtes des cibles d'impédance finie. De plus, un nouveau type d'onde, l'onde de surface, peut être générée le long de la surface des cibles. Afin de prédire correctement les phénomènes physiques se produisant, nous pouvons appliquer la théorie géométrique de la diffraction (GTD) qui a été présentée dans le chapitre précédent (§3.2) pour calculer le champ de diffraction issu d'un demi-plan ou d'une dièdre rigide. Les champs géométriques (l'onde incidente et réfléchi) sont calculés à l'aide de la théorie de l'optique géométrique (OG). Les ondes diffractées par les arêtes sont quant à elles déterminées à l'aide d'un coefficient de diffraction qui est déduit du développement asymptotique de la solution exacte (l'intégrale de Sommerfeld), ce coefficient de diffraction étant uniquement valable pour une surface parfaitement rigide dont la condition au limite est donnée par l'équation (4.10). Pour pouvoir calculer le champ de diffraction GTD d'une cible impédante, il est donc nécessaire de déterminer un autre coefficient de diffraction tenant compte de l'impédance réelle de l'interface liquide/solide étudiée.

Dans cette partie, le coefficient de réflexion défini par l'équation (4.13) est introduit dans la prédiction du champ géométrique et du champ diffracté dans le cas de cibles d'impédance finie. Le champ géométrique de réflexion (OG) est calculé simplement en multipliant le champ réfléchi à une interface rigide par le coefficient de réflexion. Pour le champ diffracté par l'arête, nous introduisons l'admittance de l'interface considérée (sodium/acier dans notre cas) au sein d'une fonction spéciale, appelée la fonction de Malyuzhinets, qui modifie la solution exacte du problème rigide, l'intégrale de Sommerfeld (3.21) pour s'adapter à la condition aux limites imposée. A l'aide du développement asymptotique de cette solution exacte dans le cas de la condition aux limites mixtes, nous obtenons le coefficient de diffraction pour un dièdre d'impédance finie. Les solutions uniformes (UTD et UAT)

étudiées dans le chapitre précédent seront modifiées ici afin de prendre en compte l'élasticité des cibles. Le rayonnement des ondes de surface ne sera pas pris en compte dans cette étude, car il a lieu pour des angles d'incidence particuliers (angle de Rayleigh, incidence rasante) et affecte rarement la rétrodiffusion. Ce phénomène devra néanmoins être étudié ultérieurement car il peut avoir une influence sur une configuration utile en télémétrie de réacteurs et décrite en Figure 5.7 a) (au Chapitre 5).

4.3.1 Diffraction par un dièdre d'impédance finie

Nous étudions ici un problème canonique : il s'agit de la diffraction des ondes planes acoustiques par un dièdre 2D (étendu à l'infini dans la direction perpendiculaire au plan de la Figure 4-4) d'impédance finie. Ce problème a été étudié dans le cas d'un dièdre rigide au §3.2.1. Nous reprenons cette étude en tenant compte de l'admittance $\sin \theta_{\pm}$ de chaque surface du dièdre. Les conditions aux limites sur les deux surfaces du dièdre $\varphi=0$ et $\varphi=\Phi$ sont exprimées à l'aide des admittances respectives de ces surfaces, reliées aux angles complexes θ_{\pm} .

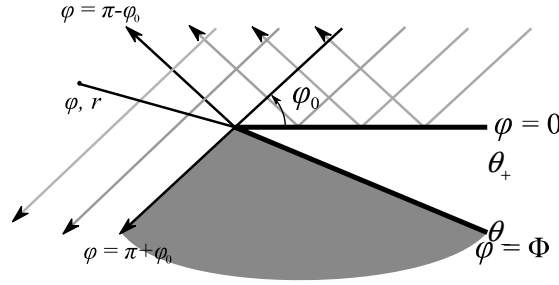


Figure 4-4 : Géométrie du problème, une onde plane de l'incidence φ_0 diffractée par un dièdre, le point d'observation étant repéré par ses coordonnées polaires 2D $<(r, \varphi)>$.

Considérons un champ acoustique $u(r, \varphi)$ (cette notation u désignera toujours un potentiel de vitesse) en régime harmonique incident sur un dièdre avec l'incidence φ_0

$$u^i(r, \varphi) = A_0 e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad (4.14)$$

où $k = \omega/c_0$ est nombre d'onde, ω est la pulsation et c_0 est la célérité du son. La convention temporelle choisie est $\exp(-i\omega t)$; elle sera omise par la suite.

Le champ diffusé par le dièdre $u(r, \varphi)$ doit vérifier l'équation d'onde en coordonnées polaires :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0, \quad (4.15)$$

dans la zone $0 < r < \infty$ et $|\varphi| \leq \Phi$. Les conditions aux limites générales sur les deux surfaces du dièdre $\varphi=0$ et $\varphi=\Phi$ s'écrivent sous la forme :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mp ik \sin \theta_{\pm} u = 0. \quad (4.16)$$

Les conditions aux limites des surfaces sont donc caractérisées par l'admittance normalisée de chaque surface $\sin \theta_{\pm}$. Nous pouvons déduire l'admittance normalisée de chaque surface $\sin \theta_{\pm}$ du dièdre à partir du coefficient de réflexion à l'aide de la relation (4.5) :

$$\sin \theta_{\pm} = \sin(\varphi_{0\pm}) \frac{1 + R(\varphi_{0\pm})}{1 - R(\varphi_{0\pm})}, \quad \text{avec} \quad \varphi_{0-} = \Phi - \varphi_{0+} \quad \text{et} \quad \varphi_{0+} = \varphi_0. \quad (4.17)$$

Les facteurs $1 + R$ et $1 - R$ interviendront par la suite pour définir la combinaison linéaire des contributions des sources de pression acoustique et de vitesse particulaire acoustique sur la surface (voir les équations (4.38.a) et (4.38.b)).

La structure du champ total GTD (potentiel de vitesse) est sous la forme suivante :

$$u(r, \varphi) = u^g(r, \varphi) + u^d(r, \varphi) + u^s(r, \varphi), \quad (4.18)$$

où u^g désigne le champ géométrique (qui est la somme du champ incident et du champ réfléchi par les surfaces du dièdre), u^d le champ diffracté par le bord ($r = 0$) et où u^s représente les ondes de surface. Pour le différencier du champ diffracté prédit par le modèle de KA (voir §4.4.3), on le notera $u_{\text{GTD}*}^d$ par la suite.

4.3.1.1 Champs géométriques

Les calculs des champs géométriques sont fondés sur les résultats donnés pour le dièdre rigide par les équations (3.8) à (3.16) en multipliant le champ réfléchi obtenu par le coefficient de réflexion correspondant. Pour un dièdre externe ($\Phi > \pi$), la forme générale des champs géométriques dans différentes zones est donnée par

$$\begin{aligned} u^g(r, \varphi) &= u^i + u_{\pm}^r \\ &= A_0 H(\pi - |\varphi - \varphi_0|) e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} + A_0 H(\pi - |\varphi_{\pm} + \varphi_{0\pm}|) R_{\pm}(\varphi_{0\pm}) e^{-ikr \cos(\varphi_{\pm} + \varphi_{0\pm})}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

où u_{\pm}^r représente le champ réfléchi respectivement à la surface supérieure (+) et inférieure (-), où $\varphi_- = \Phi - \varphi_+$ et $\varphi_+ = \varphi$, où la fonction Heaviside $H(\xi) = 1$ si $\xi > 0$, et $H(\xi) = 0$ si $\xi < 0$, et où $R_{\pm}(\varphi_{0\pm})$ est le coefficient de réflexion associé à la surface correspondante du dièdre. Si l'angle du dièdre est $\Phi < \pi$, il y aura des réflexions successives entre les deux surfaces à l'intérieur du dièdre ; dans ce cas là, une formule plus générale du champ de réflexion u_{\pm}^r est donnée par Norris et Osipov [92].

4.3.1.2 Champ diffracté par l'arête

Dans le cas d'un dièdre élastique, le champ GTD diffracté par l'arête du dièdre [80] est similaire à celui issu d'un dièdre rigide (voir la formule (3.19)) obtenue à l'aide du développement asymptotique de la solution exacte. Ce sont des ondes cylindriques (cas 2D) multipliées par un coefficient de diffraction :

$$u_{\text{GTD}*}^d(r, \varphi) = D^{\text{GTD}*}(\varphi, \varphi_0, \theta_{\pm}) A_0 \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{kr}\right) \right\}, \quad (4.20)$$

où $D^{\text{GTD}*}(\varphi, \varphi_0, \theta_{\pm})$ est le coefficient de diffraction pour un dièdre élastique, qui est une modification du coefficient donné par (3.23) dans le cas rigide :

$$D^{\text{GTD}*}(\varphi, \varphi_0, \theta_{\pm}) = \frac{e^{-i\pi/4}}{n\sqrt{2\pi k}} \frac{\sin\left(\frac{\varphi_0}{n}\right)}{\Psi\left(\frac{n\pi}{2} - \varphi_0\right)} \left[\frac{\Psi\left(\frac{n\pi}{2} - \varphi - \pi\right)}{\cos\frac{\varphi + \pi}{n} - \cos\frac{\varphi_0}{n}} - \frac{\Psi\left(\frac{n\pi}{2} - \varphi + \pi\right)}{\cos\frac{\varphi - \pi}{n} - \cos\frac{\varphi_0}{n}} \right], \quad (4.21)$$

où $n = \Phi/\pi$, lorsque $n=2$, on obtient le coefficient de diffraction d'un demi-plan élastique, et où Ψ est une fonction spéciale qui permet de prendre en compte l'impédance du dièdre élastique. Cette fonction spéciale Ψ a pour expression :

$$\Psi(\alpha) = \psi_{\Phi}(\alpha + \Phi + \theta_+ - \pi/2) \cdot \psi_{\Phi}(\alpha + \Phi + \theta_+ + \pi/2) \cdot \psi_{\Phi}(\alpha - \Phi + \theta_- - \pi/2) \cdot \psi_{\Phi}(\alpha - \Phi - \theta_- + \pi/2), \quad (4.22)$$

où θ_{\pm} est calculé à l'aide de l'équation (4.17) et où ψ_{Φ} est la fonction de Maliuzhinets, proposée par le chercheur russe Maliuzhinets [80] qui s'écrit sous la forme d'une double intégrale :

$$\psi_{\Phi}(\alpha) = \exp \frac{i}{8\Phi} \int_0^{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tan \frac{\pi u}{4\Phi}}{\cos(u-t)} du dt. \quad (4.23)$$

L'évaluation numérique de cette dernière intégrale (4.23) est difficile ; nombreuses approches ont été proposées, notamment celle de Herman *et al.* [93] qui est une combinaison de l'approximation de petit argument sur α (qui est complexe ici car contenant le terme θ):

$$\psi_{\Phi}(\alpha) \approx 1 - \alpha^2 \delta / \Phi^2, \quad \text{si } \text{Im}(\alpha) \leq 4 \quad (4.24.a)$$

avec $\delta = 0.04626 + 0.054\Phi - 0.0078\Phi^2$,

et de l'approximation de grand argument :

$$\psi_{\Phi}(\alpha) \approx \sqrt{\cos \frac{\pi\alpha}{4\Phi}} \exp\left(-\frac{\gamma}{\pi}\right), \quad \text{si } \text{Im}(\alpha) > 4 \quad (4.24.b)$$

avec $\gamma = 2.556343\Phi - 3.259678\Phi^2 + 1.659306\Phi^3 - 0.3883548\Phi^4 + 0.03473964\Phi^5$.

Les approximations (4.24.a) et (4.24.b) produisent d'après Senior [83] une erreur de 2% sur l'amplitude et de 2° sur la phase de la fonction de Maliuzhinets $\psi_{\Phi}(\alpha)$.

Pour un dièdre parfaitement rigide, nous avons $\theta_+ = \theta_- = 0$, la fonction spéciale $\Psi(\alpha)$ (4.22) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\Psi(\alpha)|_{\theta_+ = \theta_- = 0} = \frac{1}{2} \left\{ \psi_{\Phi} \left(\frac{\pi}{2} \right) \right\}^4 \cos \frac{\alpha}{n}. \quad (4.25)$$

Remplaçons aussi la fonction $\Psi(\alpha)$ dans l'équation (4.21) par le résultat (4.25) ; on obtient le coefficient de diffraction pour un dièdre rigide déjà donné par l'équation (3.23):

$$D^{\text{GTD}}(\varphi, \varphi_0, 0) = \frac{e^{-i\pi/4}}{n\sqrt{2\pi k}} \left[\frac{\sin \frac{\varphi + \pi}{n}}{\cos \frac{\varphi + \pi}{n} - \cos \frac{\varphi_0}{n}} - \frac{\sin \frac{\varphi - \pi}{n}}{\cos \frac{\varphi - \pi}{n} - \cos \frac{\varphi_0}{n}} \right]. \quad (4.26)$$

Afin de montrer l'influence de l'impédance finie du dièdre sur le champ de diffraction u^d par l'arête, nous allons comparer en Figure 4-5 l'amplitude absolue du champ de diffraction GTD calculé à l'aide de l'équation (4.20) et du coefficient de diffraction impédant donné par l'équation (4.21) et celui calculé avec le coefficient de diffraction GTD dans le cas rigide montré par l'équation (4.26). Dans notre cas d'étude, le dièdre dont l'angle $\Phi = 300^\circ$ est en acier inoxydable ; il est immergé en sodium liquide à 180°C. Le coefficient de réflexion R de l'interface correspondante est montré en Figure 4-3-b. Nous avons calculé le champ de diffraction avec différentes incidences : $\varphi_0 = 90^\circ$, $\varphi_0 = 60^\circ$, $\varphi_0 = 30^\circ$ et $\varphi_0 = 10^\circ$ ($\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \alpha^l$), où le coefficient de réflexion a des comportements différents.

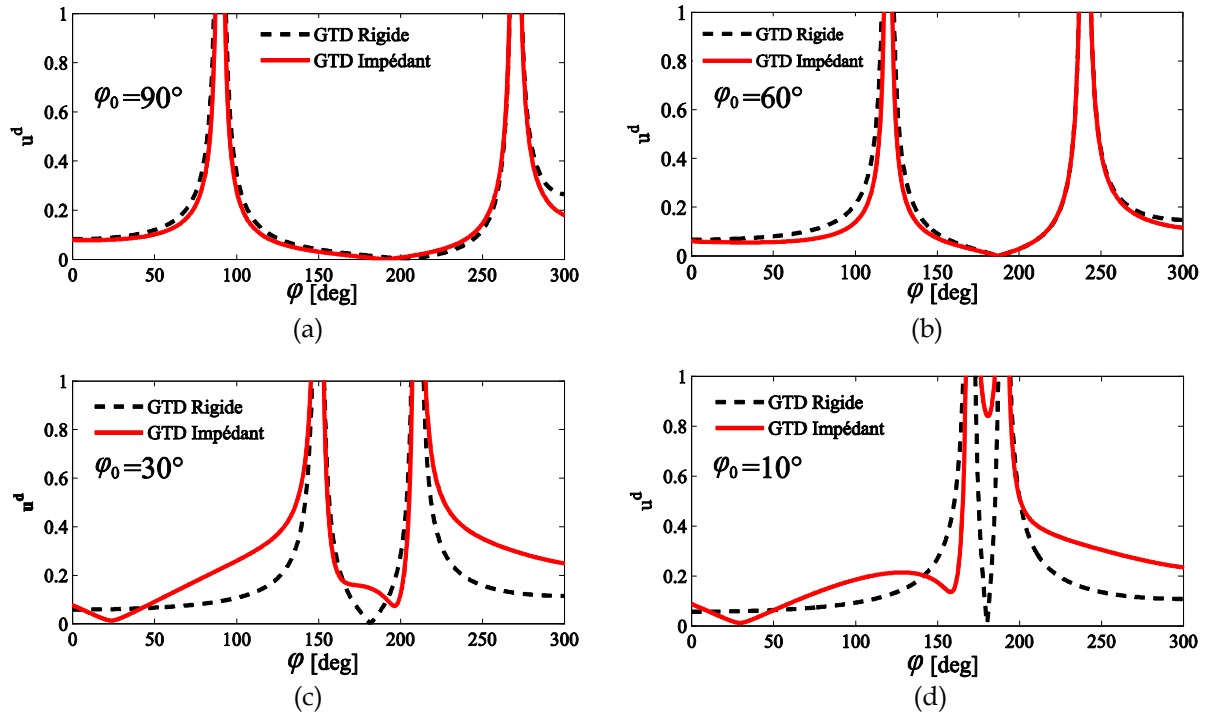


Figure 4-5 : Comparaison du champ de diffraction u^d par l'arête, avec les configurations : $A_0 = 1$, $f = 1\text{MHz}$, $c = 2742\text{m/s}$, $\lambda = 1.5\text{mm}$ ($kr=22.9$) et (a) $\varphi_0 = 90^\circ$, (b) $\varphi_0 = 60^\circ$, (c) $\varphi_0 = 30^\circ$ et (d) $\varphi_0 = 10^\circ$.

D'après les comparaisons graphiques des champs de diffraction par l'arête rigide et élastique, nous remarquons que le changement de l'amplitude du champ issu de l'impédance finie du dièdre n'est pas significatif lors que l'angle incident reste relativement grand ($\varphi_0 = 90^\circ$ et $\varphi_0 = 60^\circ$) ; en revanche, lorsque l'incidence est petit ($\varphi_0 = 30^\circ$ et $\varphi_0 = 10^\circ$), on observe une modification importante de l'amplitude du champ de diffraction, ce qui est dû en effet au changement de phase du coefficient de réflexion (voir Figure 4-3-b). Les deux modèles GTD rigide et GTD impédant prévoient des zones de singularités qui se situent près des frontières d'ombre du champ incident et du champ réfléchi. La solution uniforme présenté au §4.3.2 nous permettra de supprimer ces singularités.

4.3.1.3 Ondes de surface

Du fait de l'impédance finie du dièdre, des ondes de surface peuvent être générées le long d'une surface du dièdre, elles sont exprimées (voir référence [83]) sous la forme suivante :

$$u^s(r, \varphi) = \begin{cases} A_+^s e^{-ikr \cos(\varphi + \theta_+)} & 0 < \varphi < \text{gd}[\text{Im}(\theta_+)] - \text{Re}(\theta_+), \\ A_-^s e^{-ikr \cos(\Phi - \varphi + \theta_-)} & 0 < \Phi - \varphi < \text{gd}[\text{Im}(\theta_-)] - \text{Re}(\theta_-), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.27)$$

où

$$\text{gd}(\xi) = -\pi/2 + 2 \arctan(e^\xi), \quad (4.28)$$

et où les amplitudes des ondes de surface A_\pm^s sont déterminées par des fonctions de Maliuzhinets, pour l'onde générée à la surface supérieure :

$$\begin{aligned}
A_+^s = & 2 \sin \frac{\pi}{2n} \frac{\sin(\varphi_0/n)}{\Psi(\Phi/2 - \varphi_0)} \psi_\Phi \left(n\pi - \frac{\pi}{2} \right) \psi_\Phi \left(\varphi + \frac{(n+1)\pi}{2} + 2\theta_+ \right) \\
& \cdot \psi_\Phi \left(\varphi + \frac{(-n+1)\pi}{2} + \theta_+ + \theta_- \right) \psi_\Phi \left(\varphi + \frac{(-n+3)\pi}{2} + \theta_+ - \theta_- \right) \\
& \cdot \left\{ \cos \frac{\pi + \theta_+}{n} - \cos \frac{\varphi_0}{n} \right\}^{-1},
\end{aligned} \tag{4.29}$$

et celle à la surface inférieure :

$$\begin{aligned}
A_-^s = & 2 \sin \frac{\pi}{2n} \frac{\sin(\varphi_0/n)}{\Psi(\Phi/2 - \varphi_0)} \psi_\Phi \left(n\pi - \frac{\pi}{2} \right) \psi_\Phi \left(\varphi - \frac{(n+3)\pi}{2} + \theta_+ - \theta_- \right) \\
& \cdot \psi_\Phi \left(\varphi + \frac{(n-1)\pi}{2} - \theta_+ - \theta_- \right) \psi_\Phi \left(\varphi - \frac{(3n+1)\pi}{2} - 2\theta_- \right) \\
& \cdot \left\{ \cos \frac{\pi + \theta_-}{n} + \cos \frac{\varphi_0}{n} \right\}^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

4.3.2 Solutions uniformes

Le coefficient de diffraction GTD donné par (4.21) est non-uniforme comme celui donné par l'équation (3.23) ; les singularités se trouvent près des frontières d'ombre. Nous avons appliqué dans au §3.2.2 deux techniques : la théorie uniforme de la diffraction (UTD) et la théorie asymptotique uniforme (UAT) afin de supprimer les singularités du coefficient de diffraction. Ces deux techniques sont également valables pour la diffraction par un dièdre élastique. Les principes sont toujours les mêmes ; on donne ici uniquement les formules des solutions uniformes issues de chaque technique.

4.3.2.1 Théorie Uniforme de la diffraction (UTD)

La solution uniforme de la diffraction pour un dièdre rigide en utilisant la théorie uniforme de la diffraction (UTD) a été formulée au §3.2.2 par l'équation (3.31). Les singularités liées au coefficient de diffraction de la GTD aux frontières d'ombre sont supprimées à l'aide d'une fonction spéciale F_{KP} proposée par Kouyoumjian et Pathak [65]. Le module et la phase de cette fonction spéciale sont présentés en Figure 3-10, et le module de cette fonction tend vers zéro lorsqu'on se rapproche d'une frontière d'ombre (un point de singularité) ; à l'inverse, si on s'éloigne de la frontière d'ombre, son module tend vers un et on retrouve le coefficient de diffraction GTD en dehors des frontières d'ombre.

Cette technique a aussi été appliquée pour un dièdre élastique par Senior et Volakis [83]. Le coefficient de diffraction $D^{GTD*}(\varphi, \varphi_0, \theta_\pm)$ appliqué à une structure élastique s'écrit d'abord sous une nouvelle forme (à comparer à celle donnée par l'équation (3.31) dans le cas rigide) :

$$\begin{aligned}
D^{GTD*}(\varphi, \varphi_0, \theta_\pm) = & -\frac{e^{-i\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k}} \left\{ \frac{\Psi\left(\frac{n\pi}{2} - \pi - \varphi\right)}{\Psi\left(\frac{n\pi}{2} - \varphi_0\right)} \cot \frac{\pi + (\varphi - \varphi_0)}{2n} + \frac{\Psi\left(\frac{n\pi}{2} + \pi - \varphi\right)}{\Psi\left(\frac{n\pi}{2} - \varphi_0\right)} \cot \frac{\pi - (\varphi - \varphi_0)}{2n} \right. \\
& \left. R_- \frac{\Psi\left(\frac{n\pi}{2} - \pi - \varphi\right)}{\Psi\left(-\frac{3n\pi}{2} + \varphi_0\right)} \cot \frac{\pi + (\varphi + \varphi_0)}{2n} + R_+ \frac{\Psi\left(\frac{n\pi}{2} + \pi - \varphi\right)}{\Psi\left(\frac{n\pi}{2} + \varphi_0\right)} \cot \frac{\pi - (\varphi + \varphi_0)}{2n} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Le coefficient diffère de celui de (3.30) par l'introduction de la fonction spéciale Ψ et du coefficient de réflexion R_\pm . La méthode UTD consiste donc à multiplier chaque terme du coefficient (4.31) par la même fonction spéciale F_{KP} que celle utilisée au §3.2.2. L'équation (4.31) devient donc :

$$\begin{aligned}
D^{\text{UTD}*}(\varphi, \varphi_0, \theta_{\pm}) = & -\frac{e^{-i\pi/4}}{2n\sqrt{2\pi k}} \left\{ \frac{\Psi\left(\frac{n\pi}{2} - \pi - \varphi\right)}{\Psi\left(\frac{n\pi}{2} - \varphi_0\right)} \cot \frac{\pi + (\varphi - \varphi_0)}{2n} F_{\text{KP}} \left[kra^+(\varphi - \varphi_0) \right] \right. \\
& + \frac{\Psi\left(\frac{n\pi}{2} + \pi - \varphi\right)}{\Psi\left(\frac{n\pi}{2} - \varphi_0\right)} \cot \frac{\pi - (\varphi - \varphi_0)}{2n} F_{\text{KP}} \left[kra^-(\varphi - \varphi_0) \right] \\
& + R_- \frac{\Psi\left(\frac{n\pi}{2} - \pi - \varphi\right)}{\Psi\left(-\frac{3n\pi}{2} + \varphi_0\right)} \cot \frac{\pi + (\varphi + \varphi_0)}{2n} F_{\text{KP}} \left[kra^+(\varphi + \varphi_0) \right] \\
& \left. + R_+ \frac{\Psi\left(\frac{n\pi}{2} + \pi - \varphi\right)}{\Psi\left(\frac{n\pi}{2} + \varphi_0\right)} \cot \frac{\pi - (\varphi + \varphi_0)}{2n} F_{\text{KP}} \left[kra^-(\varphi + \varphi_0) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{4.32}$$

où F_{KP} est définie par l'équation (3.36) et où a^{\pm} sont définis par l'équation (3.33). Le champ total diffusé par un dièdre impédant est donné donc par :

$$u^{\text{UTD}}(r, \varphi) = u^{\text{g}}(r, \varphi) + u^{\text{s}}(r, \varphi) + D^{\text{UTD}*}(\varphi, \varphi_0, \theta_{\pm}) A_0 \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}, \tag{4.33}$$

où u^{g} est donné par l'équation (4.19), u^{s} est défini par l'équation (4.27) et où le coefficient de diffraction uniforme $D^{\text{UTD}*}$ est donné par (4.32).

En négligeant les ondes de surface, le champ total u^{UTD} issu de l'interaction d'une onde plane de fréquence $f = 1\text{MHz}$ avec un dièdre impédant ($\Phi = 300^\circ$) en acier inoxydable immergé ($c_L = 5393 \text{ m/s}$ et $c_T = 3038 \text{ m/s}$) dans du sodium à 180°C ($c = 2472 \text{ m/s}$) est représenté sur la Figure 4-6 par les diagrammes d'amplitude absolue en courbes rouges continues. Le dièdre est indiqué par deux segments verts, les points d'observation se situent sur un cercle de rayon $r = 6\lambda$ autour de l'arête pour un angle incident (a) : $\varphi_0 = 60^\circ$ et (b) : $\varphi_0 = 30^\circ$. Les résultats sont comparés à ceux d'un dièdre rigide (courbes noires en pointillés) obtenus par la formule de l'UTD (3.31) pour un dièdre rigide. D'après la comparaison graphique du premier diagramme Figure 4-6-a, nous pouvons constater qu'avec une incidence de 60° , l'amplitude du champ diffusé par un dièdre impédant est inférieure à celle du champ diffusé par un dièdre rigide dans la zone du champ de réflexion spéculaire ($\varphi < 120^\circ$), en revanche, dans la zone où il n'y a que du champ incident et du champ diffracté, les amplitudes dans les deux cas sont quasi égales. La modification de l'amplitude du champ de réflexion spéculaire est liée au module du coefficient de réflexion qui est de l'ordre de 0,85 pour $\varphi_0 = 60^\circ$ ($\alpha^{\text{I}} = 30^\circ$) comme illustré en Figure 4-3. Nous pouvons remarquer le fait que la nature élastique du dièdre amène une légère modification du champ de diffraction par l'arête. Pour une incidence plus rasante $\varphi_0 = 30^\circ$ ($\alpha^{\text{I}} = 60^\circ$ en Figure 4-3), les amplitudes dans les deux cas sont quasiment identiques, ce qui correspond au module du coefficient de réflexion qui est égal à 1 à cet angle ; par contre, les lobes des deux résultats ne sont plus confondus par rapport au cas avec l'incidence $\varphi_0 = 60^\circ$, en raison du changement de phase du coefficient de réflexion lorsque $\varphi_0 < 30^\circ$ ($\alpha > 60^\circ$ en Figure 4-3).

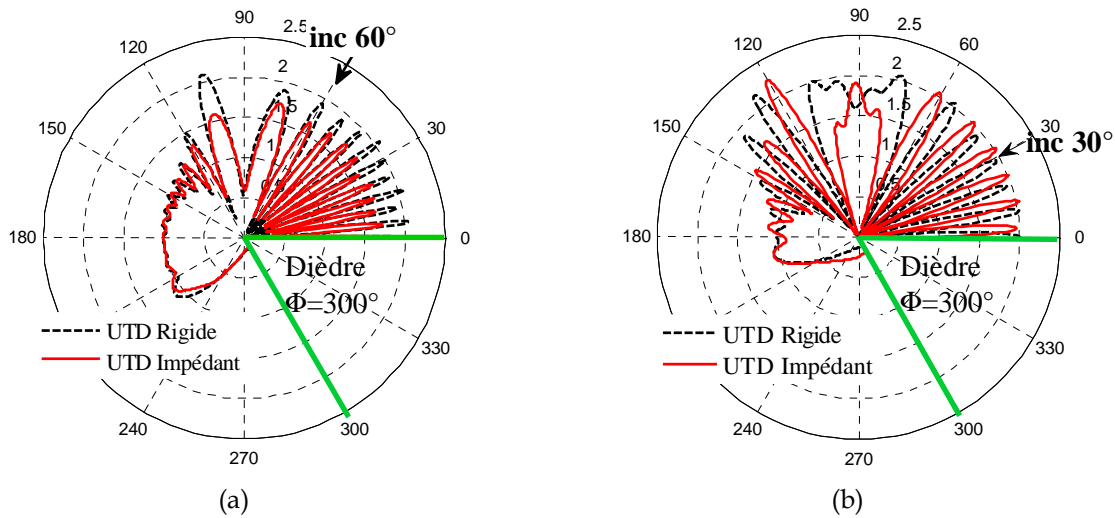


Figure 4-6 : Diagrammes de directivité d'amplitude absolue (courbes rouges continues) de la diffraction par un dièdre impédant (acier inox) immergé en sodium liquide calculés par le modèle UTD donné par les équations (4.33) en négligeant le champ u^s créé par les ondes de surface, comparés avec le champ total calculé par le modèle UTD dans le cas d'un dièdre rigide (courbes noires en pointillés) ; avec les configurations : $A_0 = 1$, $f = 1\text{MHz}$, $c = 2742\text{m/s}$, $\lambda = 1.5\text{mm}$ ($kr=22.9$) et (a) : $\varphi_0 = 60^\circ$, (b) : $\varphi_0 = 30^\circ$.

Le résultat issu du modèle UTD dans le cas du dièdre impédant pouvant être considéré comme la solution exacte du problème, nous pouvons l'utiliser comme référence pour valider les modèles qu'on va présenter plus tard dans ce chapitre.

4.3.2.2 Théorie Asymptotique Uniforme (UAT)

Nous pouvons aussi appliquer l'UAT (proposée par Norris et Osipov [92]) pour obtenir les solutions uniformes dans le cas d'un dièdre élastique. Elle consiste à multiplier d'abord les champs géométriques u^{OG} définis par l'équation (4.19) par l'intégrale de Fresnel F définie au §3.2.2 par l'équation (3.37), ce qui construit la première partie du champ uniforme. La deuxième partie de la solution UAT est sous la forme d'un développement asymptotique dont le terme d'ordre zéro est la différence entre le coefficient de diffraction GTD du dièdre élastique donné par l'équation (4.21) (valable pour un dièdre ou un demi plan) et d'un coefficient correctif « hybride ». Ce coefficient correctif n'est pas, par analogie avec le cas rigide, le coefficient de diffraction GTD du demi-plan élastique. En effet, ce coefficient correctif est obtenu à partir du coefficient de diffraction d'un demi-plan rigide en le modifiant par incorporation du coefficient de réflexion du demi-plan élastique. Ce dernier coefficient $D_{1/2 \text{ plan}}^R(\varphi, \varphi_0)$ est fourni ci-après par l'équation (4.36). On donne ici un exemple de la solution UAT dans le cas où la surface supérieure du dièdre est éclairée par une onde plane :

$$u(r, \varphi) = A_0 F \left[\sqrt{2kr} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2} \right] e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} + A_0 R_+ F \left[\sqrt{2kr} \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \right] e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} + e^{ikr} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{i}{kr} \right)^{m+1/2} B_m(\varphi, \varphi_0, \theta_{\pm}), \quad (4.34)$$

où F est l'intégrale de Fresnel et où le premier terme du développement asymptotique dans l'équation (4.34) est donné par :

$$B_0 = \sqrt{\frac{k}{i}} \left[D^{\text{GTD}*}(\varphi, \varphi_0, \theta_{\pm}) - D_{1/2 \text{ plan}}^R(\varphi, \varphi_0) \right], \quad (4.35)$$

où $D^*(\varphi, \varphi_0, \theta_\pm)$ est donné par l'équation (4.21) et où $D_{1/2 \text{ plan}}^R(\varphi, \varphi_0)$ est le coefficient de diffraction d'un demi-plan rigide modifié par prise en compte du coefficient de réflexion du demi-plan élastique (à comparer au coefficient « rigide » donné par l'équation 3.24 au chapitre 3) :

$$D_{1/2 \text{ plan}}^R(\varphi, \varphi_0) = -\frac{e^{i(\pi/4)}}{2\sqrt{2\pi k}} \left[\frac{1}{\cos[(\varphi - \varphi_0)/2]} + \frac{R}{\cos[(\varphi + \varphi_0)/2]} \right]. \quad (4.36)$$

Si $R = 1$, on retrouve le coefficient de diffraction du demi-plan dans le cas rigide. Cette méthode UAT, qui donnerait lieu à un temps de calcul plus important que l'UTD, n'a pas été implémentée dans le cas impédant.

4.4 APPLICATION DE L'APPROXIMATION DE KIRCHHOFF AU CAS D'UNE CIBLE ELASTIQUE

L'approximation de Kirchhoff a été appliquée au chapitre 3 pour trouver la solution du champ diffracté par un demi-plan ou un dièdre rigide. Cette approche, fondée sur le théorème de Green, consiste à résoudre l'équation intégrale :

$$u^{\text{dif}}(\mathbf{x}) = \int_{\Sigma} \left(u_0(x') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{x}, x') - \frac{\partial u_0(x')}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{x}, x') \right) d\Sigma, \quad (4.37)$$

où $u_0(x')$ est le champ généré sur la surface Σ par l'onde incidente, où \mathbf{n} est la normale sortante à Σ et où $G(\mathbf{x}, x')$ est la fonction de Green qui représente la solution élémentaire de l'équation d'onde au point d'observation $\mathbf{x}(x_1, x_2)$ (voir Figure 4-7) issue d'une source ponctuelle située au point x' , avec des conditions aux limites quelconques, ce qui conduit à l'expression de la fonction de Green donnée par (3.51). Les conditions sont ici choisies telles que $\partial u / \partial \mathbf{n} + ik \sin \theta u = 0$, en $x_2 = 0$ et $x_1 \geq 0$.

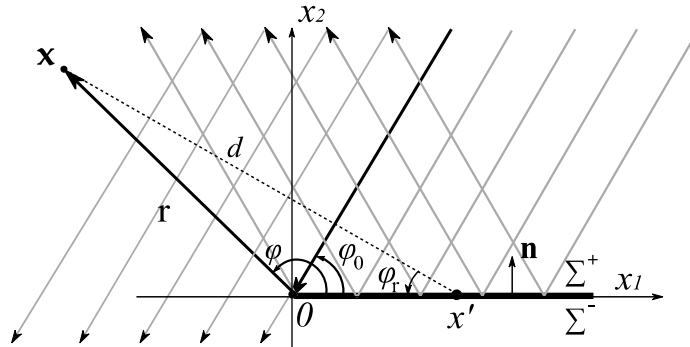


Figure 4-7 : Géométrie du problème de diffraction d'une onde plane par un demi-plan.

L'intégrale (4.37) traduit le fait que le champ rayonné par une surface Σ observé au point \mathbf{x} est le champ rayonné par une combinaison linéaire de monopôles $G(\mathbf{x}, x')$ et de dipôles $\partial_{\mathbf{n}} G(\mathbf{x}, x')$, le poids de chacun, $u_0(x')$ et $\partial_{\mathbf{n}} u_0(x')$, étant déterminé par les conditions aux limites. Dans le cas d'une surface parfaitement rigide, $\partial_{\mathbf{n}} u_0(x') = 0$, et la surface est modélisée par une répartition continue de dipôles. Dans le cas d'une surface souple, $u_0(x') = 0$, la surface est modélisée par une répartition continue de monopôles.

En effet, l'intégrale (4.37) contient deux termes qui représentent respectivement le rayonnement de ces deux types de champ de surface. Nous avons étudié au chapitre précédent le cas d'une surface parfaitement rigide en éliminant un de ces deux termes. En

revanche, pour une surface élastique immergé en liquide (impédance finie), la condition au limite n'est donc ni rigide, ni molle, mais intermédiaire. Une condition représentative plus générale doit être décrite afin d'obtenir une solution plus précise.

4.4.1 Condition au limite générale

La condition de Neumann et la condition de Dirichlet sont deux conditions aux limites extrêmes. Dans la réalité, on essaie souvent d'approcher le problème de diffraction par l'une ou l'autre condition afin de résoudre ce problème de façon simple. Si l'on est dans le cas général intermédiaire, nous considérons que le champ généré sur la surface par l'onde incidente résulte de la combinaison de deux types de sources : une source de pression acoustique générée sur une surface rigide et une source de vitesse particulière acoustique générée sur une surface molle. Les deux termes doivent donc être pris en compte dans l'intégrale (4.37). Mais il faut fixer la proportion de chaque contribution ; pour cela, Bass et Fuks [94] ont proposé de quantifier chaque contribution à l'aide du coefficient de réflexion R (4.13) :

$$u_0(x') = (1 + R)u^i(x'), \quad (4.38.a)$$

$$\frac{\partial u_0(x')}{\partial \mathbf{n}} = (1 - R)\frac{\partial u^i(x')}{\partial \mathbf{n}}. \quad (4.38.b)$$

Pour une condition parfaitement rigide, $R = 1$, on a $u_0(x') = 2u^i(x')$, $\partial u_0(x')/\partial \mathbf{n} = 0$, ce qui correspond bien à la condition limite présentée au chapitre 3 pour décrire la surface rigide c'est-à-dire à l'équation (3.52) ; pour une surface molle, $R = -1$, on retrouve donc les équations qui décrivent la condition de Dirichlet : $u_0(x') = 0$, et $\partial u_0(x')/\partial \mathbf{n} = 2\partial u^i(x')/\partial \mathbf{n}$. Les deux équations (4.38.a) et (4.38.b) sont ensuite introduites dans l'intégrale (4.37) pour calculer le champ diffusé par une surface d'impédance finie.

4.4.2 Approximation de Kirchhoff générale

En tenant compte du coefficient de réflexion, une formule plus générale de l'approximation de Kirchhoff est déduite des conditions aux limites précédentes afin de calculer le champ diffusé par une surface d'impédance finie :

$$u^{\text{dif}}(\mathbf{x}) = \int_{\Sigma} \left((1 + R)u^i(x') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{x}, x') - (1 - R)\frac{\partial u^i(x')}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{x}, x') \right) d\Sigma, \quad (4.39)$$

où u^i est le champ incident. Nous allons traiter le cas de la diffraction d'une onde plane par un demi-plan (voir la Figure 4-7). A noter qu'une formulation identique a été obtenue par Ripoll [95] en optique. On a donc $u^i = A_0 e^{-ik(x_1 \cos \varphi_0 + x_2 \sin \varphi_0)}$, $G(\mathbf{x}, x')$ est la fonction de Green ; dans un problème 2D elle est la fonction de Hankel : $G(\mathbf{x}, x') = H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$ (définie par l'équation (3.56)). Nous allons écrire tous les termes dans l'intégrale (4.39) sachant que sur la surface du demi-plan :

$$u^i(x') = A_0 e^{-ikx' \cos \varphi_0}, \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial u^i(x')}{\partial \mathbf{n}} = -A_0 ik \sin \varphi_0 e^{-ikx' \cos \varphi_0}; \quad (4.41)$$

la fonction de Hankel peut s'écrire sous la forme approchée en faisant l'hypothèse de haute fréquence :

$$H_0^{(1)}(kd) \simeq \sqrt{\frac{i}{8\pi kd}} e^{ikd}, \quad (4.42)$$

avec $d = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ (voir la Figure 4-7) et sa dérivée :

$$\frac{\partial H_0^{(1)}(kd)}{\partial \mathbf{n}} \simeq -\sin \varphi_r \sqrt{\frac{k}{8\pi i d}} e^{ikd}, \quad (4.43)$$

où l'angle φ_r est défini en Figure 4-7. L'intégrale (4.39) devient donc :

$$u^{\text{dif}}(\mathbf{x}) = -A_0 \sqrt{\frac{k}{8\pi i}} \int_0^{+\infty} \left\{ [(1+R)\sin \varphi_r - (1-R)\sin \varphi_0] \frac{e^{ik(d+x'\cos \varphi_0)}}{\sqrt{d}} \right\} dx'. \quad (4.44)$$

Le champ total calculé par le modèle de KA général est donc la somme du champ incident u^i (4.40) et du champ diffusé u^{dif} (4.44) :

$$u^t = u^i + u^{\text{dif}}. \quad (4.45)$$

Le modèle KA général développé a ensuite été étendu par Dorval *et al.* [96] à l'élastodynamique pour simuler les échos issus d'une interface entre deux milieux d'impédances finies (interface non molle).

Pour valider le modèle KA général, nous allons comparer le champ total issu de l'interaction d'une onde plane avec un demi-plan calculé par le modèle KA général et celui donné par le modèle UTD impédant utilisé comme référence. Le demi-plan (équivalent à un dièdre à angle droit s'il y a qu'une surface du dièdre éclairée par l'onde incidente) en acier inoxydable est immergé dans du sodium liquide à 180°C. L'onde plane incidente a une fréquence centrale de 1MHz, les points d'observation se situent sur un cercle de rayon $r=6\lambda$ autour de l'arête pour un angle incident (a) : $\varphi_0 = 60^\circ$ et (b) : $\varphi_0 = 30^\circ$. Nous pouvons constater que globalement il y a des bons accords entre les deux modèles à la fois en amplitude et en phase pour les deux incidences différentes. En revanche, pour une incidence $\varphi_0 = 30^\circ$, on retrouve des écarts entre les deux modèles dans la zone d'ombre absolue ($\varphi > 210^\circ$), ce qui montre que KA ne fournit pas des résultats corrects du champ diffracté par l'arête. Nous essayons de corriger cet inconvénient de KA par la technique dite « KA raffiné » que l'on a développée au chapitre précédent dans le cadre de la condition limite de Neumann (rigide). Dans la partie suivante, nous nous intéressons d'abord au développement asymptotique de KA général afin d'identifier la contribution du champ diffracté par l'arête.

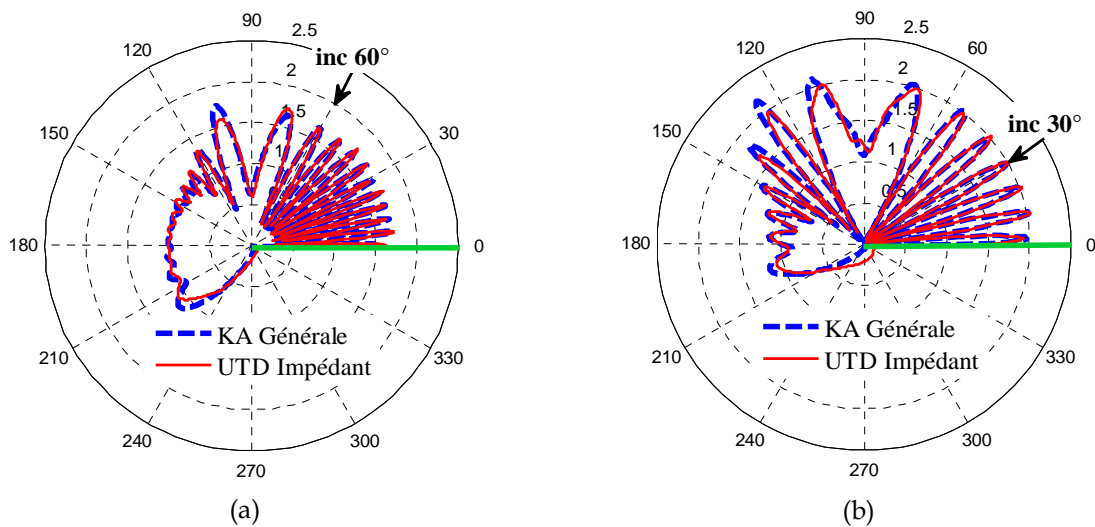


Figure 4-8 : Diagrammes de directivité d'amplitude absolue (courbes rouges continues) de la diffraction par un demi-plan impédant (acier inox) immergé en sodium liquide calculés par le modèle KA général, comparés avec le champ total calculé par le modèle UTD impédant (courbes noires en pointillés) ; avec les configurations : $A_0 = 1$, $f = 1\text{MHz}$, $c = 2742\text{m/s}$, $r=6\lambda$, $\lambda = 1.5\text{mm}$ ($kr=22.9$) et (a) : $\varphi_0 = 60^\circ$, (b) : $\varphi_0 = 30^\circ$.

4.4.3 Développement asymptotique de l'approximation de Kirchhoff générale

D'après ce qui précède (§3.4.1), la contribution de l'intégrale de Kirchhoff (3.60) est la somme du champ géométrique (réflexion spéculaire) et du champ diffracté par l'arête de l'objet. Avec la technique du développement asymptotique, nous avons réussi à séparer les deux contributions. En appliquant la même technique à l'approximation de Kirchhoff générale, nous obtenons d'abord la partie du champ de réflexion spéculaire :

$$u^r \simeq R(\varphi_0) A_0 e^{-ik(x_1 \cos \varphi_0 - x_2 \sin \varphi_0)}, \quad (4.46)$$

avec la présence du coefficient de réflexion, ce qui constitue une différence par rapport au champ de réflexion calculé au §3.4.1. Pour une intégrale bornée, nous pouvons chercher à déterminer la contribution du bord de l'intégrale en utilisant le théorème présenté par l'équation (3.66). Nous allons ainsi identifier, dans l'intégrale (4.44), la fonction de poids :

$$f(x') = [(1+R) \sin \varphi_r - (1-R) \sin \varphi_0] / \sqrt{d}, \quad (4.47)$$

la phase :

$$S(x') = d + x' \cos \varphi_0, \quad (4.48)$$

où $d = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, et $dd/dx' = \cos \varphi_r$, la dérivée de la phase par rapport à x' est donc donnée par

$$S'(x') = \cos \varphi_r - \cos \varphi_0. \quad (4.49)$$

Le bord de l'intégrale (4.44) se situant au point d'arête $x' = 0$: $d = r$, $\varphi_r = \pi - \varphi$, la phase et sa dérivée deviennent donc

$$S(0) = r, \quad S'(0) = \cos \varphi_0 - \cos(\pi - \varphi) = \cos \varphi_0 + \cos \varphi, \quad (4.50)$$

et

$$f(0) = [(1+R) \sin \varphi - (1-R) \sin \varphi_0] / \sqrt{r}. \quad (4.51)$$

Selon l'équation (3.66), le premier terme ($m=1$) du développement asymptotique de l'intégrale (4.44) de la contribution de bord ($x' = 0$) est donc :

$$\begin{aligned} u^{\text{dif}}(r, \varphi) \Big|_{x'=0} &\simeq -A_0 \sqrt{\frac{k}{8\pi i}} \cdot \left[\frac{e^{ikS(0)}}{S'(0)} \sum_{m=1}^{\infty} (i/k)^m f_{m-1}(0) \right] \Big|_{m=1} \\ &= -A_0 \sqrt{\frac{k}{8\pi i}} \frac{i}{k} \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{e^{ikr} [(1+R) \sin \varphi - (1-R) \sin \varphi_0]}{\cos \varphi_0 + \cos \varphi} \\ &= -A_0 \frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{2\sqrt{2\pi kr}} \left(\frac{\sin \varphi - \sin \varphi_0}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} + R \frac{\sin \varphi + \sin \varphi_0}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} \right) \\ &= -A_0 \frac{e^{i(kr+\pi/4)}}{2\sqrt{2\pi kr}} \left(\tan \frac{\varphi - \varphi_0}{2} + R \tan \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Ce dernier champ représente donc la contribution du développement asymptotique de l'approximation de Kirchhoff générale qui correspond au champ diffracté par l'arête ($x' = 0$)

$$u_{\text{KA}^*}^{\text{d}} = u^{\text{dif}}(r, \varphi) \Big|_{x'=0}, \quad (4.53)$$

à partir de laquelle, nous pouvons extraire le coefficient de diffraction correspondant :

$$D^{\text{KA}^*} = -\frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi k}} \left(\tan \frac{\varphi - \varphi_0}{2} + R \tan \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \right). \quad (4.54)$$

Quand $R = 1$, on retrouve le coefficient de diffraction du demi-plan qui correspond à celui dans le cas rigide donné par l'équation (3.71). La contribution du champ de diffraction de KA (4.53) peut donc s'exprimer sous la forme suivante :

$$u_{KA^*}^d = D^{KA^*} A_0 \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}. \quad (4.55)$$

Cette dernière expression est similaire à celle donnée par la GTD impédant (4.20) au coefficient de diffraction près.

4.4.4 Discussion au sujet de l'approximation de Kirchhoff générale

Nous avons identifié, dans la section précédente, la contribution du champ diffracté par l'arête dans l'intégrale de KA générale. Nous obtenons le nouveau coefficient de diffraction par l'arête de KA général (4.54) : il diffère du coefficient obtenu dans le cas rigide, donné par l'équation (3.27) au chapitre 3, par la présence du coefficient de réflexion.. Comme l'étude faite au chapitre 3, le champ géométrique (réflexion spéculaire) prédit par le modèle KA est bien précis, en revanche, le champ de diffraction par l'arête calculé avec ce coefficient de diffraction (4.54) n'est pas correct au niveau de l'amplitude ; c'est la raison pour laquelle nous avons observé des écarts entre le résultat de KA général et celui de l'UTD impédant (méthode servant de référence) en Figure 4-8. Afin de visualiser l'erreur de la prédiction de KA, nous allons comparer en Figure 4-9 l'amplitude absolue du champ de diffraction par l'arête du demi-plan calculé avec le coefficient de diffraction de KA général donné par l'équation (4.54) et celui calculé avec le coefficient de diffraction GTD impédant donné par l'équation (4.21). Les écarts de l'amplitude du champ de diffraction par l'arête prédits par GTD impédant et KA général sont liés à la différence d'amplitude des coefficients de diffraction respectifs. Cette différence de prédiction de la diffraction par l'arête entre GTD impédant et KA général est faible pour l'incidence $\varphi_0 = 60^\circ$: les écarts les plus importants sont localisés près des surfaces du demi-plan, c'est-à-dire $\varphi \rightarrow 0$ et $\varphi \rightarrow 2\pi$. Dans le cas de l'incidence $\varphi_0 = 30^\circ$, nous remarquons des écarts relativement importants dans la zone d'ombre : $\varphi \geq 240^\circ$ (pour $\varphi_0 = 30^\circ$).

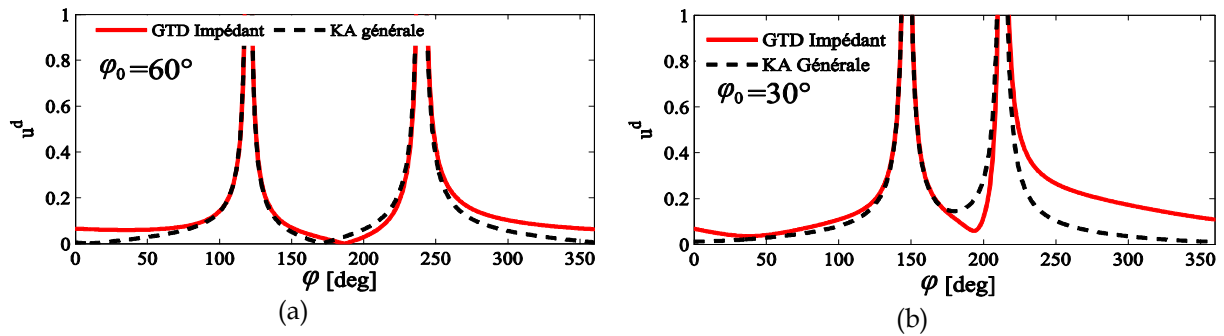


Figure 4-9 : Comparaison des champs de diffraction u^d par l'arête d'un demi-plan calculés par la GTD impédant et KA général, avec les configurations : $A_0 = 1$, $f = 1\text{MHz}$, $c = 2742\text{m/s}$, $r = 6\lambda$, $\lambda = 1.5\text{mm}$, $kr=22.9$ et (a) $\varphi_0 = 60^\circ$, (b) $\varphi_0 = 30^\circ$.

Pour quantifier l'erreur de KA pour la prédiction du champ de diffraction par l'arête, nous allons étudier la différence des modules des coefficients de diffraction $|D^{GTD^*}| - |D^{KA^*}|$ plutôt que le module de la différence $|D^{GTD^*} - D^{KA^*}|$ car ce dernier module diverge aux frontières d'ombres, les deux coefficients D^{GTD^*} et D^{KA^*} présentant alors des modules et des phases différentes dans le cas impédant contrairement au cas rigide (ce fait sera détaillé ci-

après). La différence des modules $|D^{\text{GTD}*}| - |D^{\text{KA}*}|$ est illustrée en Figure 4-10 en fonction de l'angle d'observation φ . Comme dit précédemment, on constate généralement au niveau des frontières d'ombre des discontinuités de la différence des modules $|D^{\text{GTD}*}| - |D^{\text{KA}*}|$, les deux coefficients de diffraction ayant des modules différents. Pour l'incidence $\varphi_0 = 60^\circ$, l'erreur de KA est inférieure à 5% (sachant que $A_0 = 1$) ; en revanche, l'erreur peut atteindre jusqu'à près de 20% pour l'incidence $\varphi_0 = 30^\circ$ dans la zone d'ombre ($\varphi \geq 240^\circ$).

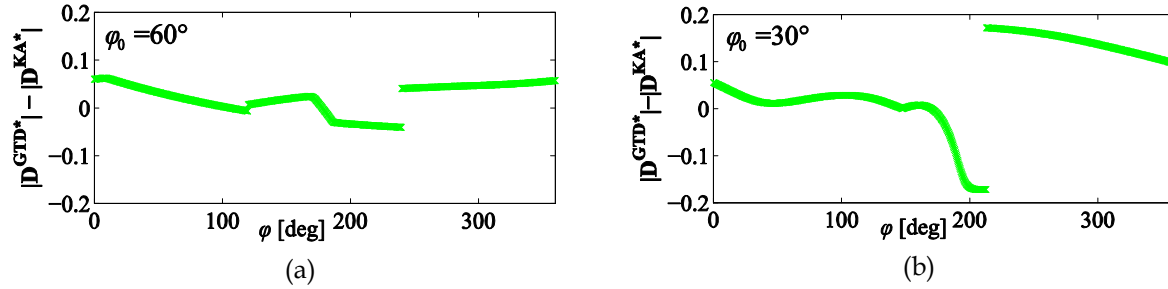


Figure 4-10 : Erreurs du champ de diffraction par l'arête de KA générale par rapport à la GTD impédant pour l'incidence (a) $\varphi_0 = 60^\circ$, (b) $\varphi_0 = 30^\circ$.

Dans le chapitre précédant, pour un dièdre ou demi-plan rigide, l'amplitude du champ de diffraction prédit par le modèle GTD est toujours supérieure à celle calculée par le modèle KA. En revanche, dans le cas d'une surface d'impédance finie, nous remarquons en Figure 4-9 que ce n'est pas toujours le cas. Pour certains angles d'observation, l'amplitude du champ de diffraction calculé par le modèle GTD impédant peut être inférieure à celle donnée par le modèle KA général. La différence d'amplitude du champ de diffraction entre deux modèles n'est donc pas continue. Par conséquent, nous ne pouvons pas employer la technique de raffinement présenté dans le chapitre 3 pour corriger les erreurs de KA général dans la prédiction du champ de diffraction dans certains angles d'observation. Ces discontinuités de la différence des coefficients de diffraction sont notamment dues à la fonction de Malyuzhinets dont la valeur est toujours complexe dans notre cas d'étude. Mais nous proposons ici une solution intermédiaire, fondée sur une approximation de diffuseur quasi rigide, pour avoir une correction de KA continue dans toutes les directions : cela consiste à faire intervenir le coefficient de diffraction GTD du diffuseur rigide et à le modifier par incorporation du coefficient de réflexion intervenant dans le cas du diffuseur impédant. Cette correction proposée en termes de coefficient de diffraction GTD impédant prend la forme suivante par exemple pour le cas d'un demi-plan :

$$D_{1/2 \text{ plan}}^R(\varphi, \varphi_0) = -\frac{e^{i(\pi/4)}}{2\sqrt{2\pi k}} \left[\frac{1}{\cos[(\varphi - \varphi_0)/2]} + \frac{R}{\cos[(\varphi + \varphi_0)/2]} \right]. \quad (4.56)$$

En faisant la différence des deux coefficients de diffraction, nous avons donc :

$$D^{\text{Corr}*} = D_{1/2 \text{ plan}}^R - D^{\text{KA}*} = \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi k}} \left(\frac{\sin((\varphi - \varphi_0)/2) - 1}{\cos((\varphi - \varphi_0)/2)} + R \frac{\sin((\varphi + \varphi_0)/2) - 1}{\cos((\varphi + \varphi_0)/2)} \right). \quad (4.57)$$

L'idée est d'utiliser cette correction $D^{\text{Corr}*}$ dans le but de combler les écarts d'amplitude absolue du champ de diffraction par l'arête : $|D^{\text{GTD}*}| - |D^{\text{KA}*}|$, montrés en Figure 4-10. Nous illustrons en Figure 4-11 la correction $D^{\text{Corr}*}$ pour deux angles d'incident $\varphi_0 = 60^\circ$ et $\varphi_0 = 30^\circ$ avec le coefficient de réflexion R de notre cas d'étude donné par la relation (4.13), et nous pouvons constater que cette correction est inférieure à 0,1 et toujours positive. Par conséquent elle n'élimine que très partiellement les écarts constatés en Figure 4-10. En effet,

en l'absence de la fonction de Malyuzhinets, la correction $D^{\text{Corr}*}$ n'est pas une correction rigoureuse pour le cas d'une surface d'impédance finie. Le champ total de KA général après cette éventuelle correction $u^{\text{RKA}*}$ peut s'exprimer sous la forme :

$$u^{\text{RKA}*} = u^{\text{KA}*} + D^{\text{Corr}*} A_0 \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} = u^g + (D^{\text{KA}*} + D^{\text{Corr}*}) A_0 \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \quad (4.58)$$

où $u^{\text{KA}*} = u^{\text{dif}}$ est donné par la formule (4.44). La performance de cette correction peut être quantifiée par la différence des amplitudes absolues u^{DIF} entre la solution GTD impédant (servant de référence) et le champ de KA général après correction ; comme ils ont les mêmes champs géométriques u^g , cette différence s'exprime comme la différence des champs de diffraction des deux modèles. On a en effet comme $D^{\text{Corr}*}$ et $D^{\text{KA}*}$ ont la même phase :

$$\begin{aligned} u^{\text{DIF}} &= \left| D^{\text{GTD}*} A_0 \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \right| - \left| (D^{\text{KA}*} + D^{\text{Corr}*}) A_0 \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \right| \\ &= (|D^{\text{GTD}*}| - |D^{\text{KA}*}| - |D^{\text{Corr}*}|) A_0 \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

D'après cette dernière relation (4.59), la différence des amplitudes absolues peut être étudiée par le terme : $|D^{\text{GTD}*}| - |D^{\text{KA}*}| - |D^{\text{Corr}*}|$, qui est représentée Figure 4-12 par les courbes rouges pour deux incidence différentes : $\varphi_0 = 60^\circ$ et $\varphi_0 = 30^\circ$, dans ces mêmes figures, les courbes vertes représentent la même grandeur que celle en Figure 4-10, c'est-à-dire la différence (l'erreur de KA) du champ de diffraction entre KA général (non corrigé) et GTD impédant. En Figure 4-12, on constate que, après la correction, la différence diminue dans la zone $0 < \varphi < 120^\circ$ et $240^\circ < \varphi < 360^\circ$ pour l'incidence $\varphi_0 = 60^\circ$. Par contre, pour une incidence faible $\varphi_0 = 30^\circ$, cette correction ne peut pas corriger les grands écarts entre la solution de KA général et la GTD impédant.

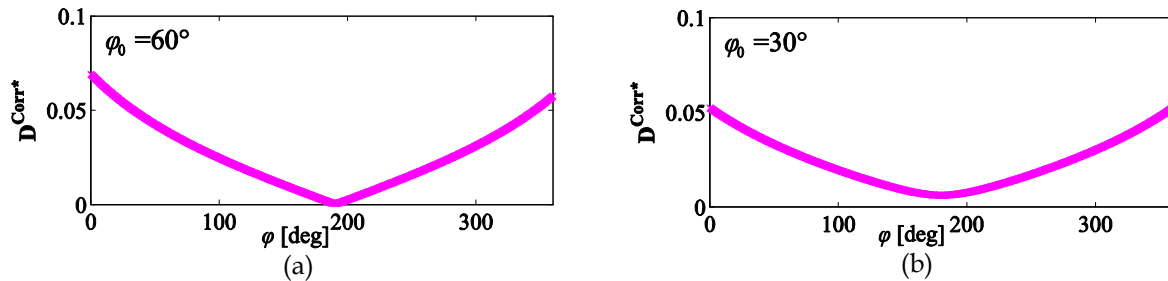


Figure 4-11 : Module de la correction de KA par un coefficient de diffraction modifié par le coefficient de réflexion R pour l'incidence (a) $\varphi_0 = 60^\circ$, (b) $\varphi_0 = 30^\circ$.

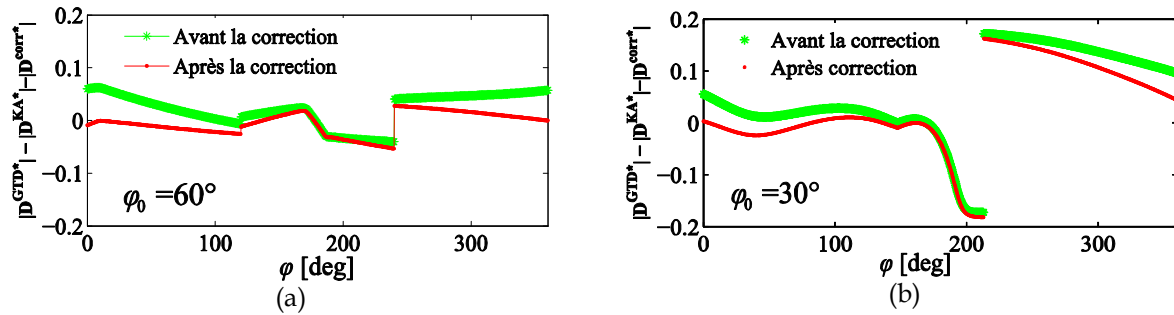


Figure 4-12 : Erreurs du champ de diffraction après la correction proposée $D^{\text{Corr}*}$ pour l'incidence (a) $\varphi_0 = 60^\circ$, (b) $\varphi_0 = 30^\circ$.

Comparons les champs totaux diffusés par un demi-plan en Figure 4-13 fournis par le modèle UTD impédant (courbe rouge), KA général (courbe noire) et KA général corrigé (courbe verte), et les résultats sont représentés en fonction de l'angle d'observation φ pour l'incidence $\varphi_0 = 60^\circ$ et $\varphi_0 = 30^\circ$. Nous pouvons constater que les écarts entre les solutions fournies par le modèle KA général corrigé et celles de l'UTD impédant sont du même ordre que ceux entre les solutions de KA général et celles de l'UTD. La correction que nous avons proposée est donc insuffisante pour corriger l'erreur de KA général dans notre cas d'étude, mais elle peut parfois s'avérer plus efficace pour des diffuseurs d'impédance extrêmement proches du cas rigide.

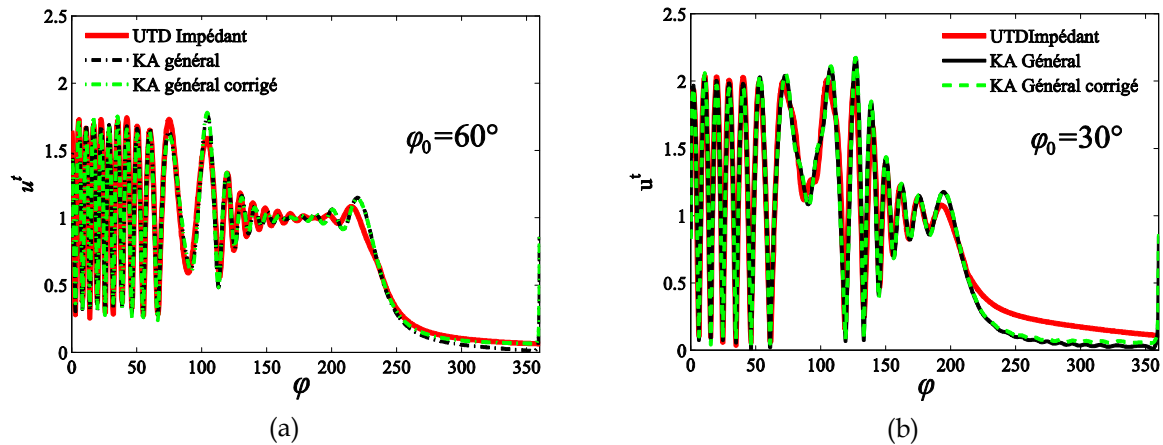


Figure 4-13 : Comparaisons des champs totaux diffusés par un demi-plan avec l'incidence $\varphi_0 = 60^\circ$ calculés par le modèle UTD impédant, KA général et KA général corrigé.

En revanche, dans l'application télémétrie, nous sommes plutôt dans les situations où l'angle d'incidence reste relativement grand et donc pour lesquelles l'erreur de KA est faible selon la comparaison en Figure 4-8-a et Figure 4-13-a. Nous intégrons finalement la formule de KA général dans la plateforme CIVA (détails dans le chapitre 5) pour simuler les échos d'interaction entre le faisceau acoustique et les cibles à inspecter.

4.5 CONCLUSION

Nous avons tout d'abord étudié, dans le cas d'une cible impédante, la condition aux limites non parfaite qui est en effet une combinaison linéaire de la condition de Neumann (surface parfaitement rigide) et de la condition de Dirichlet (surface molle). Cette condition aux limites mixte est caractérisée par l'admittance caractéristique à l'interface considérée : sodium liquide 180° /acier inoxydable dans notre cas d'étude.

L'extension du modèle de GTD valide pour un dièdre (ou demi-plan) d'impédance finie a été étudiée. L'introduction de la fonction de Malyuzhinets dans la formule classique de la GTD pour une cible rigide permet de tenir compte de l'admittance du dièdre impédant dans le calcul du champ diffusé. Le champ diffusé par le dièdre d'impédance finie est désormais composé de trois parties liées aux propriétés élastiques du dièdre, le champ de réflexion, le champ de diffraction par l'arête du dièdre et le champ des ondes de surface. Le champ de réflexion est simplement modifié par le coefficient de réflexion par rapport à la réflexion sur une surface rigide ; les champs de diffraction et des ondes de surface font intervenir la fonction de Malyuzhinets. En comparant les champs de diffraction GTD dans le cas rigide et dans le cas impédant, nous avons constaté, dans le cadre de notre étude, que les écarts liés à la condition aux limites impédante sont plus importants lorsque l'incidence est faible ($\varphi_0 \leq 30^\circ$).

Afin d'obtenir un champ de diffraction uniforme dans toutes les directions d'observation, nous avons appliqué le modèle UTD (technique étudiée au chapitre précédent pour le dièdre rigide) pour un dièdre d'impédance finie, c'est-à-dire le modèle UTD impédant. On considère le résultat donné par l'UTD impédant comme la solution de référence pour la diffraction par un dièdre d'impédance finie, en vue de valider les autres modèles. Nous avons également donné la formule de l'UAT valide dans le cas impédant.

Nous avons ensuite développé la formule de KA générale valable pour une condition aux limites générale. Le modèle KA général développé se présente sous la forme d'une combinaison de la formule KA pour la condition de Neumann et de celle pour la condition de Dirichlet. Nous avons comparé le champ diffusé par un demi-plan impédant calculé par KA général et celui de l'UTD impédant. On a constaté que globalement il y a des bons accords entre les résultats issus de ces deux modèles, l'erreur de KA générale se trouvant surtout dans la zone d'ombre lorsque l'incidence est faible. Nous avons proposé une technique de raffinement afin d'essayer de corriger l'erreur du champ de diffraction prédit par le modèle KA ; cette technique fournit seulement de légères améliorations. En perspective, on pourrait, dans la même optique, étendre à l'application acoustique des techniques de correction développées dans le domaine électromagnétique, par exemple : la méthode des courants équivalents de Michaeli [86, 87] ; et le coefficient de diffraction incrémental (*Incremental Length Diffraction Coefficient*) de Mitzner [88] .

Nous choisissons finalement d'employer l'approximation de Kirchhoff générale que nous avons développée au sein d'un modèle complet d'inspection télémétrique qui est décrit au chapitre 5 suivant.

5

INTEGRATION LOGICIELLE ET VALIDATION EXPERIMENTALE D'UN MODELE COMPLET DE TELEMETRIE ULTRASONORE

LE but de ce chapitre est de faire le lien entre les différents modèles développés, dans l'objectif du développement d'un outil de simulation pour la télémétrie ultrasonore. Dans les quatre chapitres précédents, nous avons étudié et développé des modèles physiques pour simuler les deux types de phénomènes mis en jeu lors de la télémétrie : la propagation d'onde en sodium liquide subissant de faibles fluctuations aléatoires de température et l'interaction de cette onde avec les cibles immergées en sodium. Le phénomène de propagation a été modélisé par un modèle déterministe fondé sur la théorie des rayons et sur un modèle stochastique qui est une combinaison du modèle de propagation en milieu fluide homogène moyenné et d'une aberration aléatoire de phase afin de tenir compte de la variation aléatoire de vitesse du son, liée à la variation de température. Pour le moment, la modélisation d'un champ de température homogène (type gradient constant) au sein du milieu de propagation n'est pas prise en compte dans l'intégration logicielle réalisée d'un modèle complet de télémétrie. En vue de modéliser uniquement des fluctuations aléatoires de température, le modèle stochastique a été finalement retenu en raison de sa simplicité et son efficacité. Pour modéliser l'interaction faisceau/cible, après avoir comparé les différents modèles, nous avons décidé de choisir le modèle de KA général afin de prendre en compte de manière simple l'élasticité des cibles.

Afin de réunir les deux modèles développés et de pouvoir simuler le processus complet de la télémétrie, nous devons désormais intégrer les deux modèles dans la plateforme CIVA de simulation en CND. Ce chapitre présente donc l'intégration logicielle dans CIVA et les validations expérimentales de ce modèle complet de télémétrie. Les principes des calculs de champ et de la réponse échographique de défauts ou de cibles dans CIVA sont tout d'abord présentés. Ensuite, les liens entre les variables des formules des modules CIVA avec celles des modèles développés sont établis.

Des essais dédiés aux validations expérimentales des modèles développés ont été réalisés par le pôle DEN (Direction de l'Energie Nucléaire) du CEA au centre de Cadarache. Ces essais ont été réalisés sur une maquette « MULTIREFLECTEUR » dans laquelle se trouvent des cibles de différentes géométries. Les mesures ont été effectuées à température constante à la fois en eau et en sodium avec une température de 200°C (celle du réacteur à l'arrêt) et ne permettent donc pas de valider pour le moment la modélisation de la propagation en milieu inhomogène. Nous comparons dans ce chapitre les amplitudes et les temps de vol (qui

servent au calcul de distances) des échos expérimentaux issus de différentes cibles avec les simulations par CIVA correspondantes.

5.1 INTRODUCTION

L'objectif final de cette thèse est de développer un outil de simulation pour la télémétrie par ultrasons ; cet outil devant servir à la prédiction des échos issus de cibles immergées en sodium dans une configuration d'inspection donnée. Cette prédiction permettra ainsi d'évaluer les performances des dispositifs de télémétrie par ultrasons en sodium. Comme nous déjà présenté dans les chapitres précédents, le principe de la télémétrie est de déterminer la distance entre le transducteur et la cible en mesurant le temps de vol des échos reçus, ce temps de vol subit des perturbations liées aux phénomènes de diffraction par les arêtes de la cible visée, aux réflexions parasites issues des autres structures réfléchissantes, et aux signaux créés par d'éventuelles ondes de surface. A cela s'ajoutent, quand le réacteur est en puissance, des perturbations de la propagation par les hétérogénéités de la vitesse du son du milieu.

Durant cette thèse, nous avons d'abord développé un modèle de propagation en sodium liquide qui tient compte de manière statistique des hétérogénéités de vitesse du son lorsque le réacteur est en fonctionnement. Ensuite, pour prendre en compte les phénomènes liés à la diffraction des ondes par les arêtes des cibles, différents modèles de diffraction ont été étudiés, développés et comparés. Finalement, le modèle de KA général développé dans le chapitre 4 sera appliqué, car non seulement ce modèle calcule efficacement non seulement les ondes de réflexion spéculaire, de diffraction par les arêtes mais il prend aussi en compte l'influence de l'élasticité du matériau de la cible. Avec les deux modèles théoriques, nous pouvons donc évaluer les incertitudes de mesure et déterminer des facteurs correcteurs.

Nous allons réaliser des simulations complètes de télémétrie en faisant la connexion entre les modèles que nous avons développés ; pour cela, nous allons intégrer ces deux modèles dans la plateforme CIVA qui intègre déjà des outils de simulation d'un processus échographique (dont les principes théoriques sont décrits par Darmon et Chatillon [97]. CIVA est une plate-forme logicielle de simulation et d'expertise en CND [5] qui est notamment dédiée à la modélisation du calcul de champ et d'échos relatifs à l'inspection ultrasonore de pièce solides. CIVA dispose en effet d'un module de calcul du champ qui simule le champ ultrasonore généré par un transducteur quelconque et rayonné dans un milieu fluide homogène [98] (fondé sur la méthode des pinces développée par Gengembre et Lhemery [99]). Pour la simulation de la télémétrie, nous pouvons donc utiliser directement le module de calcul déjà existant du champ en milieu fluide homogène pour les contrôles en sodium à température homogène, qui sont justement les conditions expérimentales des essais réalisés avec le « MULTIREFLECTEUR ». En revanche, si la prise en compte de la variation de température est indispensable, les temps de vol de tous les tracés de rayons rayonnés par le transducteur en milieu fluide homogène doivent être modifiés, et les corrections seront fournies par le modèle d'aberration aléatoire de phase développé dans le chapitre 2 et intégré dans CIVA.

CIVA dispose également d'un module « Réponse défaut », qui permet de calculer l'interaction entre le faisceau rayonné dans une pièce solide et un défaut [100, 101]. Ce modèle peut également être utilisé pour calculer les échos de surface d'une pièce ou d'une cible immergée. Nous allons utiliser les formulations existantes de calcul d'échos en appliquant le modèle d'interaction développé : cela consiste à introduire dans la formulation du calcul d'échos le nouveau facteur de directivité de la diffraction issu du modèle de Kirchhoff général développé au chapitre 4.

Une maquette « MULTIREFLECTEUR » a par ailleurs été conçue spécifiquement pour les validations expérimentales des modèles développés. Cette maquette dispose de cibles de différentes géométries, notamment des cibles de grandes dimensions (parallélépipèdes rectangles) et de petites dimensions : petit triangle, triplan et hémisphère. Les tirs sur les cibles de grande dimension (supérieure à la largeur du faisceau et grande devant la longueur d'onde) serviront soit à l'étalonnage, soit à la validation de la modélisation de la réflexion spéculaire ; les tirs sur les petites cibles serviront la validation du calcul de la diffraction par les arêtes des cibles. La géométrie de cette maquette, le transducteur employé, les signaux générés, ainsi que les résultats des échos reçus seront détaillés dans la partie §5.3. Nous allons également décrire les simulations des échos issus de ces cibles avec CIVA, ce qui nous permet d'effectuer la validation expérimentale des modèles développés.

5.2 INTEGRATION LOGICIELLE D'UN MODELE COMPLET DE TELEMETRIE ULTRASONORE DANS CIVA

Nous allons donc présenter dans cette section les intégrations des modèles dédiés à la simulation de la télémétrie dans CIVA. Pour le calcul de la propagation du champ en sodium liquide subissant des faibles fluctuations aléatoires de température, nous allons coupler l'aberration aléatoire de phase que nous avons développée avec le module déjà existant de calcul de champ en milieu fluide homogène. Pour la modélisation de l'interaction faisceau-cible, c'est le modèle de Kirchhoff général qui sera intégré dans CIVA pour simuler le champ diffusé sur les cibles à inspecter avec la condition aux limites mixte caractéristique de la surface impédante de la cible. Sachant que le module « Réponse défaut » simule le champ diffusé par un défaut inclus dans une pièce solide, il est donc fondé sur une formulation du calcul d'écho correspondant aux ondes élastiques. Une modification de cette formulation pour adaptation au cas d'une propagation en milieu fluide est décrite ci-après. Une fois ces modèles intégrés, nous pouvons donc réaliser la simulation complète de la télémétrie au sein de la plateforme CIVA et enfin réaliser des comparaisons calculs/essais expérimentaux.

5.2.1 Calcul du champ rayonné dans un milieu fluide

Le principe du calcul du champ en milieu fluide homogène dans CIVA est d'abord montré ici, afin d'expliquer par la suite l'intégration du modèle d'aberration aléatoire.

5.2.1.1 Principe du calcul du champ en milieu homogène dans CIVA

Dans CIVA, le calcul du champ est possible dans un milieu fluide mais aussi dans un milieu solide (pièce à inspecter) après passage d'une interface milieu fluide/pièce. Dans ce dernier cas, on calcule la propagation du faisceau tout d'abord dans le milieu fluide et ensuite dans le milieu solide comme illustré en Figure 5-1.

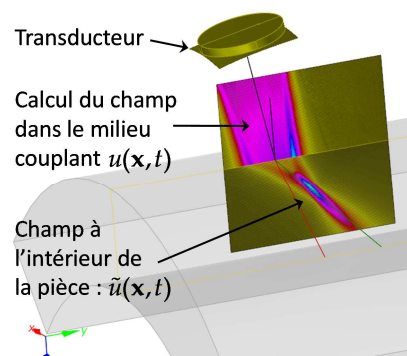


Figure 5-1: Calcul du champ ultrasonore dans une pièce solide modélisé dans CIVA

Le principe du calcul du champ acoustique rayonné dans un seul milieu fluide par un transducteur quelconque, déjà présenté au chapitre 1 §1.3.3, est fondé sur l'intégrale de Rayleigh. On définit la réponse impulsionnelle du traducteur à l'émission $h(\mathbf{x}, t)$ comme le potentiel de vitesse généré au point \mathbf{x} par le transducteur soumis à une vitesse vibratoire normale égale à une fonction de Dirac $\delta(t)$; d'après l'intégrale de Rayleigh :

$$h_e(\mathbf{x}, t) = \iint_{\text{pastille}} \frac{V_n(\mathbf{x}_0) \delta(t - r/c_0)}{2\pi r} ds. \quad (5.1)$$

où $V_n(\mathbf{x}_0)$ est le profil de l'amplitude de la vitesse vibratoire normale de la pastille du transducteur fonction des coordonnées \mathbf{x}_0 sur la pastille, et où r et c_0 sont respectivement la distance entre un point de la pastille et le point d'observation \mathbf{x} et la célérité de l'onde dans le milieu de propagation. En effet le terme r/c_0 correspond au temps de vol T_0 d'un rayon ayant parcouru une distance r dans le milieu fluide.

Le champ $u(\mathbf{x}, t)$ émis par un transducteur soumis à une vitesse vibratoire normale quelconque $v_0(t)$ peut alors être modélisé par un filtre de réponse impulsionnelle $h_e(\mathbf{x}, t)$, puisque le potentiel de vitesse au point d'observation \mathbf{x} et au temps t s'exprime donc comme suit:

$$u(\mathbf{x}, t) = v_0(t) * h_e(\mathbf{x}, t), \quad (5.2)$$

$$u(\mathbf{x}, t) = v_0(t) * \iint_{\text{pastille}} \frac{V_n(\mathbf{x}_0) \delta(t - r/c_0)}{2\pi r} ds, \quad (5.3)$$

A partir du champ rayonné dans un milieu fluide), nous pouvons calculer dans CIVA le champ rayonné dans un solide élastique après passage d'une interface liquide-solide. Mais comme la télémétrie s'effectue toujours dans le milieu fluide, on s'intéresse donc uniquement à la partie de la propagation en milieu fluide du module de calcul du champ de CIVA.

5.2.1.2 Intégration de l'aberration aléatoire de phase dans le modèle de propagation de CIVA

L'intégration de l'aberration aléatoire de phase dans le modèle de propagation existant dans CIVA est relativement simple : elle consiste à modifier seulement le temps de parcours T_0 dans le milieu liquide qui est considéré comme un milieu faiblement inhomogène et aléatoire dans notre cas d'étude. Avec la méthode de changement de repère présenté aux §2.4.2 et §2.4.3 dans le chapitre 2, nous pouvons établir une relation suivante :

$$T'(\mathbf{r}) = \sqrt{2} \sum_{j=1}^N A_j(|\mathbf{r}|) \cos(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} + \varphi_j), \quad (5.4)$$

où $\mathbf{r} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}$ d'après les équations (2.72) et (2.73) du chapitre 2. Dans CIVA, on cherche alors les trajets entre le point de calcul \mathbf{x} et le point sur la surface du transducteur \mathbf{x}_0 . Pour déterminer ces trajets, un lancer de rayons est effectué à partir du point de calcul en direction du traducteur. Chaque trajet trouvé peut être identifié par le vecteur \mathbf{r} , et la formule (5.4) calcule donc la modification de temps de vol correspondante. La réponse impulsionnelle donnée par la relation (5.1) devient donc :

$$h_e(\mathbf{x}, t) = \iint_{\text{pastille}} \frac{V_n(\mathbf{x}_0) \delta[t - (|\mathbf{r}|/c_0 + T'(\mathbf{r}))]}{2\pi |\mathbf{r}|} ds. \quad (5.5)$$

5.2.2 Calcul de l'écho spéculaire

Le module « Réponse défaut » de CIVA calcule la diffusion des ondes par un défaut inclus dans une pièce solide. Le champ diffusé dépend du champ incident, de la direction d'incidence et d'observation ainsi que des caractéristiques du défaut. Comme le défaut se trouve dans un solide élastique, les formules du module « Réponse défaut » décrivent à la fois les ondes longitudinales et les ondes transversales du champ diffusé par le défaut. En revanche, pour l'application télémétrie, la cible se situe toujours en milieu fluide et on calcule le champ diffusé par une ou plusieurs interfaces liquide/solide au niveau de la cible; nous calculons donc uniquement des ondes longitudinales dans le milieu de propagation fluide. Il est donc nécessaire de modifier les formules actuelles dans CIVA afin d'adapter l'application télémétrie pour calculer le champ diffusé par une cibles à partir du champ incident calculé précédemment. Nous allons présenter dans un premier temps le principe du calcul d'échos (module « Réponse défaut ») de CIVA, qui peut s'appliquer à la fois dans les cas élastodynamique (échos de défauts dans une pièce solide) et acoustique (échos de cibles immergées ou échos d'entrée de pièce solides). Cette formulation de calcul d'échos est générique et peut s'appliquer à différents types de modèles d'interaction faisceau-défaut. Ensuite, nous allons voir comment la formule de l'intégrale de KA générale s'intègre à cette formulation de calcul d'échos.

5.2.2.1 Principe du module « Réponse défaut » dans CIVA

Le module « Réponse défaut » dans CIVA calcule les échos rétrodiffusés par un défaut. Nous rapportons ici les principales hypothèses qui sont employées, en se plaçant ici uniquement dans le cas des ondes longitudinales. En premier lieu, le champ ultrasonore rayonné par le transducteur, et calculé par le module de calcul de champ, est approché par le produit d'une fonction $q(\mathbf{x})$ décrivant la distribution spatiale de l'amplitude du champ dans le faisceau et d'une fonction dépendant du temps décrivant la propagation des ondes. Dans le cas d'ondes longitudinales, cette fonction du temps peut être approchée par la vitesse vibratoire normale $v_0(t)$ en supposant qu'il n'y aucune distorsion de phase lors de la propagation : en particulier, pour un défaut inclus dans une pièce solide, il n'y a pas de déphasage dans le cas d'ondes longitudinales réfractées à l'interface matériau fluide/pièce. Néanmoins, une distorsion de phase de l'impulsion incidente est bien prise en compte dans le calcul d'échos du module « Réponse défaut » : une telle distorsion peut ainsi être observée par exemple pour un point de calcul de champ éloigné de l'axe du capteur. Dans un souci de simplification stéréographique, nous négligerons par la suite dans les développements théoriques ce déphasage éventuel. Afin d'appliquer une séparation de variables au niveau de la formulation du champ rayonné, nous supposons que les fronts d'onde du faisceau sont localement plans à proximité d'un point \mathbf{x}' du défaut. Le champ incident sur le défaut peut donc être estimé comme suit :

$$u^i(\mathbf{x}', t) = q(\mathbf{x}') v_0(t - T_L) = v_0(t) * h_e(\mathbf{x}', t), \quad (5.6)$$

où la fonction $q(\mathbf{x}')$ est extraite du calcul de champ et T_L le temps de vol. Comme la modélisation suppose que les fronts d'onde du faisceau sont localement plans à proximité du défaut, ce dernier doit être situé en champ lointain des capteurs plans utilisés ou dans la zone focale d'un capteur focalisé.

On se place désormais, pour application à la télémétrie, dans le cas d'un milieu de propagation fluide. On considère ensuite que la cible centrée en \mathbf{x}' va se comporter comme un ensemble de sources secondaires sur sa surface diffusant les ondes incidentes en un point \mathbf{x} dans le milieu liquide sous la forme d'ondelettes sphériques diffusées longitudinales

caractérisées par une fonction $A(\mathbf{x}', t)$ de directivité de la diffraction. Le champ diffusé, en termes de potentiel de vitesse, est le suivant:

$$u^{\text{dif}}(\mathbf{x}, t) = \int_{\text{cible}} \frac{A(\mathbf{x}', t)}{r'} * u^i(\mathbf{x}', t - \frac{r'}{c_{0L}}) d\mathbf{x}' \quad (5.7)$$

où $A(\mathbf{x}', t)$ dépend du temps, de la forme, de la taille et du matériau de la cible ainsi que des directions d'incidence et d'observation et où c_{0L} est la vitesse dans le milieu liquide. L'objectif de la modélisation faisceau/défaut est donc de prédire cette fonction de directivité $A(\mathbf{x}, t)$. Une telle approximation du champ diffusé par un défaut est précise si la cible est située en champ lointain du capteur en réception. En effet, en un point d'observation situé à une distance de plusieurs longueurs d'onde de la cible, la cible agit comme une ou un ensemble de sources ponctuelles générant chacune une ondelette sphérique. Dans CIVA, on modélise l'écho rétrodiffusé par la pression totale sur le transducteur et il peut être démontré que l'amplitude de l'écho rétrodiffusé est la suivante [97] :

$$\bar{p}_x(t) = 2\pi\rho_0 \int_{\text{cible}} q^2(\mathbf{x}') \left[\int A(\mathbf{x}', t) * \text{Sig_ref}(t - 2T_L) dt \right] d\mathbf{x}' \quad (5.8)$$

où ρ_0 est la masse volumique du matériau de la pièce, où $\text{Sig_ref}(t)$ est le signal d'entrée de la modélisation (appelé signal de référence) est défini à partir de la vitesse vibratoire normale comme suit [97] :

$$\text{Sig_ref}(t) = \frac{\partial^2 v_0(t)}{\partial t^2}. \quad (5.9)$$

5.2.2.2 La formulation 3D du modèle de Kirchhoff général

Dans le chapitre 4, la formulation du modèle de Kirchhoff général a été présentée dans le cas 2D (défaut infini suivant la direction perpendiculaire au plan d'incidence) pour l'évaluation des modèles. Pour une application réaliste, l'interaction entre une onde générée par un transducteur et une structure doit être modélisée par une formulation 3D quand la structure est de dimension « finie » ou qu'elle présente une désorientation par rapport au capteur. Prenons l'exemple d'une cible plane (voir Figure 5-2) dont la surface S est éclairée par une onde incidente plane u^i . Définissons le repère lié à la surface $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, et où $\mathbf{e}_3 = \mathbf{n}$, le vecteur normale à la surface. L'angle entre le vecteur du point courant \mathbf{x}' de la surface S et la direction de l'onde incidente est noté φ_0 ; l'expression du champ incident sur la surface S est donnée par :

$$u^i(\mathbf{x}') = q(\mathbf{x}') e^{-ik|\mathbf{x}'| \cos \varphi_0}, \quad (5.10)$$

où $|\mathbf{x}'|$ est le module du vecteur \mathbf{x}' , et où $q(\mathbf{x}')$ représente la distribution de l'amplitude de l'onde incidente plane au point \mathbf{x}' sur la surface S . La dérivée par rapport à \mathbf{n} de cette onde incidente est donnée par :

$$\frac{\partial u^i(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}} = -iku^i(\mathbf{x}') \cdot (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}), \quad (5.11)$$

où $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ est le vecteur unitaire selon la direction de propagation, $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}$ représente le produit scalaire entre le vecteur $\hat{\mathbf{k}}$ et la normale \mathbf{n} à la surface S .

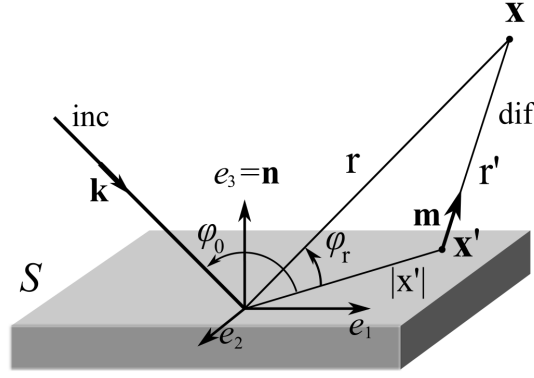


Figure 5-2: Géométrie du problème 3D de diffraction par une cible plane.

Rappelons maintenant la formule (4.39) du modèle KA général démontrée dans le chapitre 4 :

$$u^{\text{dif}}(\mathbf{x}) = \int_S \left((1+R)u^i(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) - (1-R) \frac{\partial u^i(\mathbf{x}')}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \right) d\mathbf{x}', \quad (5.12)$$

où S est la surface éclairée de la cible. $G(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ est la fonction de Green et R le coefficient de réflexion à la surface S . Dans le cas 3D, la fonction de Green est donnée par :

$$G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr'}}{r'}, \quad (5.13)$$

où $r' = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ est la distance entre le point courant \mathbf{x}' sur la surface S et le point d'observation \mathbf{x} . La distance du point d'observation à l'origine O définie sur la surface est r . Si on définit ici également l'angle φ_r entre le vecteur \mathbf{x}' et le vecteur \mathbf{x} , on peut faire l'approximation suivante si le point d'observation se situe en champ lointain ($r \gg |\mathbf{x}'|$) :

$$r' \approx r - |\mathbf{x}'| \cos \varphi_r, \quad \frac{e^{ikr'}}{r'} \approx \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik|\mathbf{x}'| \cos \varphi_r}. \quad (5.14)$$

La fonction de Green devient donc sous l'approximation de champ lointain:

$$G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \approx \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik|\mathbf{x}'| \cos \varphi_r} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr'}}{r'}. \quad (5.15)$$

La dérivée par rapport à la normale de la fonction de Green est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \left(\frac{e^{ikr'}}{r'} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr'}}{r'} \right) \frac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{1}{4\pi} \left(ik + \frac{1}{r'} \right) \frac{e^{ikr'}}{r'} (\hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n}) \\ &\approx -\frac{ik}{4\pi} \frac{e^{ikr'}}{r'} (\hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n}). \end{aligned} \quad (5.16)$$

où $\hat{\mathbf{m}}$ est le vecteur unitaire selon la direction reliant le point \mathbf{x}' et le point \mathbf{x} (voir Figure 5-2). Nous avons donc :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = -\frac{ik}{4\pi} \frac{e^{ikr'}}{r'} (\hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n}) = -ikG(\mathbf{x}', \mathbf{x}) (\hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n}). \quad (5.17)$$

La formule de KA générale dans le cas 3D en champ lointain devient finalement, en vertu de (5.10) et (5.16) :

$$\begin{aligned}
u^{\text{dif}}(\mathbf{x}, k) &= -\int_S \left(ik(1+R)u^i(\mathbf{x}')G(\mathbf{x}', \mathbf{x})(\hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n}) - ik(1-R)u^i(\mathbf{x}')G(\mathbf{x}', \mathbf{x})(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}) \right) dS(\mathbf{x}') \\
&= -ik \int_S u^i(\mathbf{x}')G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \left((1+R)(\hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n}) - (1-R)(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}) \right) dS(\mathbf{x}') \\
&= -\frac{ik}{4\pi} \int_S \left((1+R)(\hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n}) - (1-R)(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}) \right) u^i(\mathbf{x}') \frac{e^{ikr'}}{r'} dS(\mathbf{x}').
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Si la cible se situe loin du point d'observation, la cible est donc considérée comme un ensemble de sources secondaires qui génère des ondes sphériques ; on a en régime harmonique d'après (5.7) :

$$u^{\text{dif}}(\mathbf{x}, k) = \int_S \frac{e^{ikr'}}{r'} A(\mathbf{x}, k) u^i(\mathbf{x}', k) dS(\mathbf{x}') \tag{5.19}$$

avec

$$A(\mathbf{x}, k) = -\frac{ik}{4\pi} \left((1+R)(\hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n}) - (1-R)(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}) \right). \tag{5.20}$$

Dans le domaine temporel, le champ diffusé s'écrit comme suit :

$$u^{\text{dif}}(\mathbf{x}, t) = \int_S \frac{A(\mathbf{x}', t)}{r'} * u^i(\mathbf{x}', t - \frac{r'}{c_{0L}}) dS(\mathbf{x}'), \tag{5.21}$$

et le facteur de directivité de la diffraction en ondes sphériques s'exprime sous la forme :

$$A(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left((1+R)(\hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n}) - (1-R)(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}) \right) \delta(t). \tag{5.22}$$

La pression acoustique devient d'après (5.8) :

$$\bar{p}_{\mathbf{x}}(t) = -\frac{\rho_0}{2\pi} \int_S q^2(\mathbf{x}') \left((1+R)(\hat{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{n}) - (1-R)(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}) \right) \text{Sig}_{\text{ref}}(t - 2T_L) dS(\mathbf{x}') \tag{5.23}$$

L'écho est donc proportionnel au carré de la répartition spatiale du potentiel scalaire du champ rayonné ainsi qu'au signal d'entrée de la modélisation.

5.3 VALIDATIONS EXPERIMENTALES

5.3.1 Objectif

Des essais en télémétrie a été réalisés par CEA/DEN sur une maquette « MULTIREFLECTEUR », afin de réaliser des acquisitions de signaux de télémétrie ultrasonore afin d'effectuer une comparaison calcul/expérience pour différentes configurations. Ces essais sont réalisés d'abord en eau à température ambiante puis en sodium à 180°C. En parallèle, des simulations de la télémétrie ont été faites avec le logiciel CIVA. Des échos issus des différentes cibles ont ainsi été calculés en eau et en sodium. Nous allons comparer les amplitudes et les temps de vol des échos fournis par les essais et par les simulations.

5.3.2 Description des procédures expérimentales

5.3.2.1 Description de la maquette employée

Afin d'effectuer une comparaison calcul/expérience pour différentes configurations de télémétrie, des essais expérimentaux ont été réalisés par CEA/DEN au centre de Cadarache. Ces essais consistent à réaliser des acquisitions de signaux de télémétrie sur une maquette « MULTIREFLECTEUR » destinée à valider les modèles utilisés pour la télémétrie en sodium. La maquette « MULTIREFLECTEUR » (illustrée en Figure 5-3) est spécifiquement conçue pour les essais de télémétrie ; elle est composée de différents types de cibles

(réflecteurs) et d'un traducteur ultrasonore TUSHT (Traducteur UltraSonore Haute Température) monté sur un support de rotation, ce qui permet au transducteur d'effectuer un balayage angulaire pour réaliser des mesures sur différentes cibles (voir Figure 5-5).

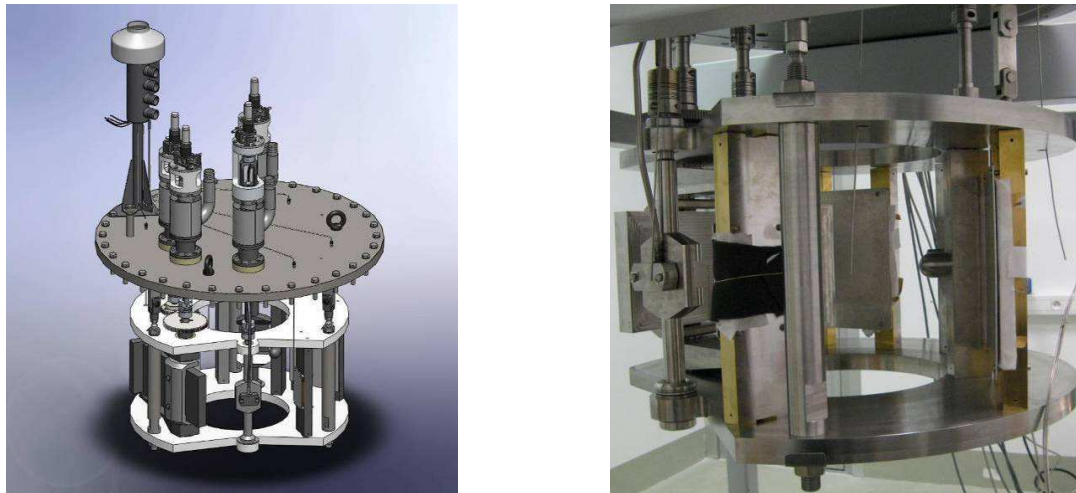


Figure 5-3 : Vue 3D de la maquette « MULTIREFLECTEUR » : de la CAO à la réalité.

Pour comprendre le fonctionnement de la maquette « MULTIREFLECTEUR », nous allons rappeler le principe de la télémétrie : elle consiste à envoyer un faisceau ultrasonore à l'aide d'un transducteur immergé (voir Figure 5-4) vers une structure (également immergée) à contrôler, ce faisceau ultrasonore va interagir avec la structure visée. Après cette interaction, une onde est rétrodiffusée par cette structure et ensuite détectée par le même transducteur. En mesurant le temps de vol du signal reçu, la distance L entre la surface du transducteur et la structure inspectée peut être évaluée à partir du temps mesuré et de la vitesse du son dans le milieu. La maquette nous permet donc de réaliser l'inspection par télémétrie des cibles de différentes géométries qui représentent les structures réelles rencontrées lors de l'inspection du réacteur nucléaire. Les cibles sont fixées sur une structure circulaire comme illustré en Figure 5-3, de sorte que l'inspection puisse être réalisée sur toutes les cibles par une simple rotation du transducteur. Cette structure circulaire sera ensuite installée dans un bac en eau pour les essais en eau et ensuite dans un réservoir de stockage en sodium pour les essais en sodium à 180°C.

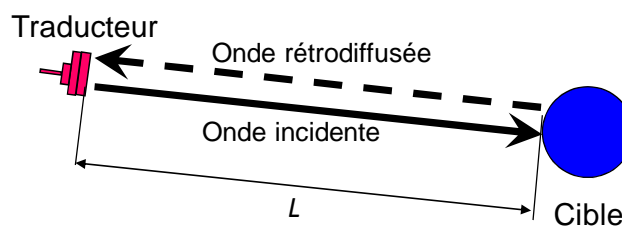


Figure 5-4: Détermination de la distance entre le transducteur de la cible visée en mesurant le temps de vol de l'onde rétrodiffusée.

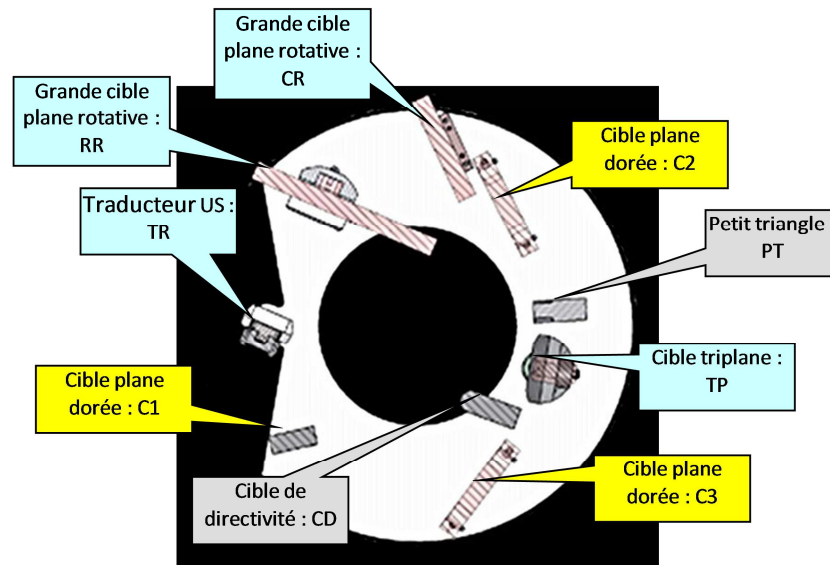


Figure 5-5 : Schéma des cibles de la maquette

Les différents types de cibles sont détaillés en Figure 5-5. On peut distinguer notamment les structures de grandes dimensions (C1, C2, C3, RR et CR) dont les dimensions sont grandes devant la longueur d'onde et les petites cibles (PT, CD et TP).

Pour les grandes cibles, le transducteur peut être considéré comme ponctuel ; la taille du faisceau est bien inférieure à la taille des cibles et l'on observe sur le capteur en réception la réflexion spéculaire sur la cible si l'on est proche de l'incidence normale, et la diffraction par les bords de cibles dans le cas d'incidence oblique. Les tirs sur les cibles planes C1 et C2 servent aux étalonnages. Les tirs sur C3 servent à la validation de la modélisation de la télémétrie sur une « grande » cible lisse. A cause de la rugosité de surface, les surfaces ne sont pas parfaitement mouillées par le sodium, créant localement des bulles gazeuses entre le sodium et la surface de la cible. L'onde incidente se réfléchit parfois sur l'interface sodium/gaz et non sur l'interface sodium/acier, ce qui va donc influencer la précision de l'inspection. Les trois cibles (C1, C2, C3) et le transducteur sont donc dorés de façon à obtenir le mouillage lors des essais en sodium à 180°C. La fine couche d'or n'est pas prise en compte dans la simulation : cette hypothèse simplificatrice nous permettra cependant dans la suite d'obtenir des validations expérimentales satisfaisantes en termes d'amplitude des échos de ces cibles, tout en sachant que l'une d'entre elles sert de référence en amplitude (voir §5.3.4.3.2). Une montée à haute température suivie d'une descente en température a été aussi effectuée en vue d'assurer le mouillage au niveau des cibles et du transducteur. Lorsqu'une onde est incidente sur le « petit triangle » PT (comme illustré en Figure 5-6-a), l'onde peut être diffractée par les bords et les pointes, mais on observe une réflexion spéculaire prédominante en incidence normale sur une face. Cet essai va nous permettre de valider le modèle de Kirchhoff général dans le cas d'une cible de taille plus petite, mais qui reste néanmoins grande par rapport à la longueur d'onde.

La cible triplane TP est une cible qui a été installée dans le réacteur Super-Phénix afin d'effectuer des mesures de télémétrie sur des points de références situés sur des structures à surveiller. En effet la cible triplane est composée de trois facettes perpendiculaires ; lorsqu'une onde impacte une surface de la cible, elle va se réfléchir trois fois successivement sur chacune de ces facettes et ensuite repartir dans la direction d'incidence (voir la Figure 5-6-b). L'onde incidente peut être également diffractée par les bords et les pointes du triplan, et ensuite les ondes diffractées peuvent également être diffractées encore une fois par l'autre bord ou pointe ou bien réfléchies sur une facette etc. Ces phénomènes de réflexion et

diffraction multiples sont bien détaillés dans la thèse de C. Locqueteau [102]. Les tirs sur le triplan serviront aux validations des modélisations des télémétries sur des triplans.

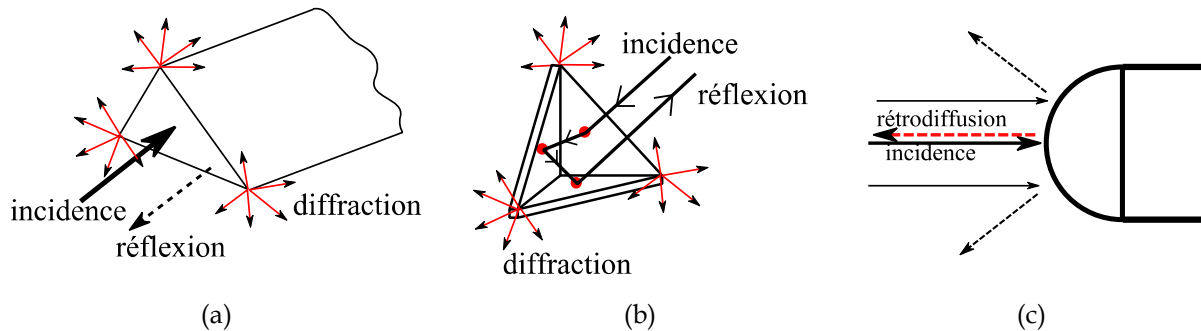


Figure 5-6: Les cibles de petite dimension : (a) petite triangle ; (b) triplan ; (c) cible sphérique.

La cible sphérique CD est vue par les ultrasons comme une demi-sphère renvoyant un écho de réflexion spéculaire issu du voisinage de son sommet insonifié (voir la Figure 5-6-c), et servira à la fois à valider la modélisation des télémétries sur cette géométrie et à mesurer la directivité du traducteur, c'est-à-dire le désaxage du centre du faisceau acoustique par rapport à l'axe géométrique du traducteur.

Quand une onde est incidente sur une cible de grande dimension avec l'angle critique, des ondes de surface (représentée par la flèche rouge dans la Figure 5-7-a) peuvent être générées le long de la surface. Ces ondes de surface vont rerayeronner des ondes de volume (flèche bleue dans la Figure 5-7-a) qui sont susceptibles d'interagir avec une autre cible. La cible RR est conçue pour valider les modèles (à développer dans le futur) faisant intervenir les ondes de surface (voir la Figure 5-7-a), et les tirs sur une arête du renvoi d'angle RR permettront de tester les modélisations comportant de la diffraction d'arêtes pour de grandes cibles. En revanche, certains phénomènes ne seront pas modélisés pour le moment, notamment, la réflexion multiple (voir la Figure 5-7-a) et les ondes de surface.

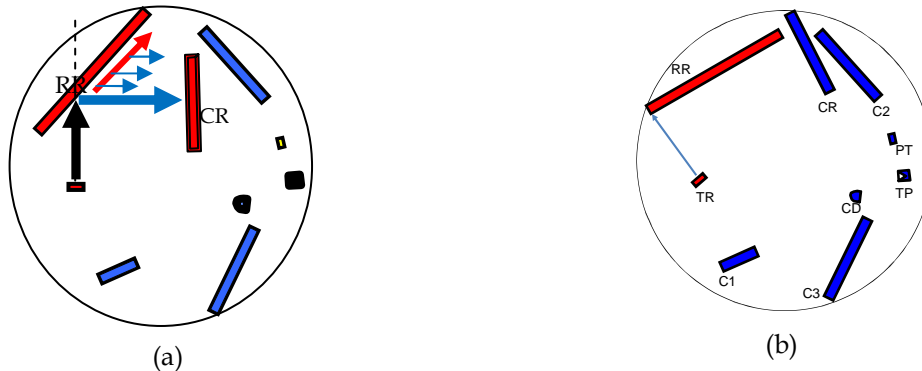


Figure 5-7 : Tirs sur la cible RR : (a) effet des ondes de surface (symbolisées par la flèche rouge) sur le renvoi d'angle RR réfléchissant le faisceau vers CR ; (b) diffraction sur une arête.

Les principales distances transducteur-cibles et dimensions des cibles sont présentées dans le tableau ci-dessous. Une métrologie a en effet été réalisée par CEA/DEN afin de connaître les distances transducteur-cibles avec une précision de quelques dizaines de micromètres.

Tableau 5-1 : Principales distances transducteur-cible

Cible	RR	CR	C1	C2	C3	PT	TP	CD
Déplacement	Rotatif	Rotatif	Fixe	Fixe	Fixe	Fixe	Rotatif	Fixe
Forme	Rectangle	Carré	Carré	Carré	Carré	Triangle	Triplan	Hémisphère
Distance (mm)	300 ⁽²⁾	300 ⁽³⁾	250	600	600	620	640 ⁽¹⁾	480
Largeur (mm)	H=255 L=452	255	107 ⁽⁴⁾	255 ⁽⁴⁾	255 ⁽⁴⁾	~50	40	50

(1) C'est en réalité le sommet du triplan qui est à 640 mm du transducteur. En outre, l'axe de rotation passe par le sommet (point d'intersection des trois facettes perpendiculaires) du triplan.

(2) C'est l'axe de rotation de RR situé sur sa face avant qui est à cette distance.

(3) La distance est comptée depuis l'axe de rotation de RR.

(4) L'épaisseur des cibles C1, C2 et C3 est de 42 mm.

5.3.2.2 Transducteur ultrasonore employé

Comme le transducteur employé doit fonctionner au cœur du réacteur en fonctionnement à très haute température, il doit donc résister à cette température. Le transducteur, appelé le Traducteur UltraSonore Haute Température (TUSHT), fabriqué au CEA, est choisi, car il a été testé en sodium, et est capable de largement supporter les hautes températures (jusqu'à 600°C) conduisant au mouillage des structures.

Un transducteur de diamètre Ø40mm a été employé, qui se comporte en pratique comme un piston bafflé circulaire avec un diamètre effectif actif, déduit de mesures de directivité relative aux pressions, Ø_{eff}=30 mm. Le TUSHT possède 5 fréquences de travail : 0.69, 1.4, 2.2, 2.9 et 4.5 MHz. Lors du post traitement effectué en §5.3.2.4, des filtres passe bande ont été appliqués au signal d'excitation du TUSHT pour chacune de ses fréquences de travail, et les simulations dans CIVA ont été effectuées en utilisant les signaux filtrés comme signaux d'entrée pour chaque fréquence de travail.

Tableau 5-2: limites de champ proches H et angles limite θ_L du premier lobe de directivité pour les différentes fréquences de travail en eau et en sodium (Na).

f (Mhz)	0,69	1,40	2,20	2,90	4,50
λ_{eau} (mm)	2,2	1,1	0,68	0,52	0,33
λ_{Na} (mm)	3,6	1,8	1,1	0,85	0,55
$H_{\text{eau}} \approx \frac{\phi_{\text{eff}}^2}{4\lambda_{\text{eau}}} \text{ (m)}$	0,104	0,210	0,330	0,435	0,675
$H_{\text{Na}} \approx \frac{\phi_{\text{eff}}^2}{4\lambda_{\text{Na}}}$	0,063	0,125	0,205	0,265	0,410
$\theta_{L_{\text{eau}}} \approx \frac{180}{\pi} * 1,22 * \frac{\lambda_{\text{eau}}}{\phi_{\text{eff}}} \text{ (}^\circ\text{)}$	5,1	2,5	1,6	1,2	0,8
$\theta_{L_{\text{Na}}} \approx \frac{180}{\pi} * 1,22 * \frac{\lambda_{\text{Na}}}{\phi_{\text{eff}}} \text{ (}^\circ\text{)}$	8.4	4,2	2,6	2,0	1,3

Pour les essais en eau ($C_{\text{eau}} \sim 1500 \text{ m/s}$) et en sodium ($C_{\text{Na}} \sim 2473 \text{ m/s}$), et nous pouvons calculer les limites de champ proche H correspondantes (voir Tableau 5-2). En eau, la cible C1 (250 mm) est située dans le champ proche pour les trois dernières fréquences, tandis que les cibles C2 et C3 (600 mm) ne le sont que pour la fréquence de 4.5 MHz. L'interprétation

des mesures devra tenir compte du fait que certaines cibles sont dans le champ proche du traducteur US pour lequel la modélisation est plus délicate car les hypothèses de fronts d'onde plans précédemment évoquées ne sont plus forcément respectées.

5.3.2.3 Calcul des incertitudes des résultats expérimentaux de télémétrie

Un calcul d'incertitude permet d'évaluer correctement les erreurs qui se produisent lors des mesures en télémétrie. Les incertitudes des résultats des essais en eau et en sodium ont ainsi été évaluées en tenant compte de la métrologie et des différents paramètres liés à la réalité des conditions de réalisation, notamment l'homogénéité de température du liquide (voir le rapport technique du CEA/DEN [103]). La somme quadratique des incertitudes liées aux différents paramètres donne l'incertitude globale des résultats de mesures durant les essais en eau et en sodium.

Après avoir étudié toutes les incertitudes des paramètres, G. Gobillot [103] a montré que, pour les essais dans l'eau, le paramètre prépondérant dans le calcul d'incertitude est l'homogénéité en température de l'eau, qui représente à lui tout seul environ 130 μm d'incertitude ramené à la mesure de distance dans l'eau de température quasi homogène, tandis que l'incertitude liée à la métrologie des instruments de mesure dans l'eau ne représente que 40 μm . L'incertitude globale sur les résultats de mesures dans l'eau est de 144 μm en faisant la somme quadratique des incertitudes liés aux différents paramètres qui influencent la précision des mesures dans l'eau.

En revanche dans le sodium, l'incertitude liée à l'homogénéité du sodium ne représente plus que 65 μm . L'incertitude globale des résultats des mesures dans le sodium est de 94 μm .

5.3.2.4 Traitement du signal

Le signal expérimental obtenu sur la cible d'étalonnage C1 inspectée avec le TUSHT est montré en Figure 5-8 : (a) Signal ultrasonore obtenue sur la cible C1 avant filtrage (courbe bleue), (b) Représentation fréquentielle d'un signal (courbe bleue). ainsi que son spectre. Nous pouvons constater sur le signal A-scan trois échos séparés qui sont respectivement l'écho de surface, l'écho de fond et un autre écho après deux rebonds sur le fond.

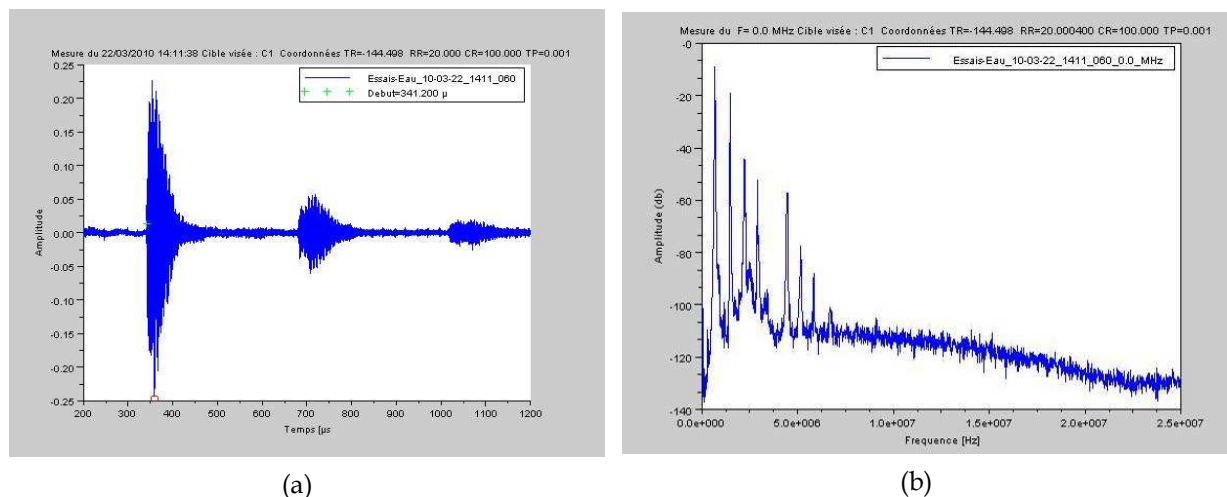


Figure 5-8 : (a) Signal ultrasonore obtenue sur la cible C1 avant filtrage (courbe bleue), (b) Représentation fréquentielle d'un signal (courbe bleue).

Le contenu spectral du signal obtenu est complexe et composé d'un ensemble de raies correspondant aux fréquences propres connues du transducteur employé TUSHT (voir le Un transducteur de diamètre $\varnothing 40\text{mm}$ a été employé, qui se comporte en pratique comme un piston bafflé circulaire avec un diamètre effectif actif, déduit de mesures de directivité relative aux pressions, $\varnothing_{\text{eff}}=30\text{ mm}$. Le TUSHT possède 5 fréquences de travail : 0.69, 1.4, 2.2,

2.9 et 4.5 MHz. Lors du post traitement effectué en §5.3.2.4, des filtres passe bande ont été appliqués au signal d'excitation du TUSHT pour chacune de ses fréquences de travail, et les simulations dans CIVA ont été effectuées en utilisant les signaux filtrés comme signaux d'entrée pour chaque fréquence de travail.

Tableau 5-2), de quelques harmoniques. Les deux premières raies sont largement prédominantes en termes d'amplitude du spectre. La contribution des raies à 2.2MHz et à 4.5 MHz par exemple sont inférieures à celle à 0.7 MHz respectivement d'un facteur 30 et d'un facteur 300. L'amplitude relative de chacune des raies varie en fonction de la distance traducteur-cible.

Un filtrage par fréquence propre du TUSHT est effectué à 0.7 -1.4 -2.2 -2.9 et 4.5 MHz (filtre de Butterworth d'ordre 4 avec une largeur de bande de 400 kHz). Les résultats expérimentaux présentés par la suite seront analysés pour chacune des fréquences de travail.

5.3.3 Modélisation de la télémétrie avec CIVA

Les outils existants de simulation ultrasonore dans CIVA sont consacrés principalement à la modélisation de la propagation d'ondes élastiques au sein de matériaux solides et à leur interaction avec des défauts de type fissures ou inclusions. Les résultats de simulation présentés dans ce rapport sont issus du modèle d'écho de surface de CIVA intégrant les développements du modèle de Kirchhoff général développé dans le chapitre 4. Ce nouveau modèle d'écho de surface permet de modéliser à la fois la réflexion à la surface d'une pièce solide et la diffraction par les bords de cette pièce. En revanche, il ne permet pas d'estimer les effets d'onde de surface.

5.3.3.1 Options de calculs

Les calculs effectués dans ce rapport ont été faits avec une version de développement de CIVA intégrant les développements en calcul d'échos du modèle de Kirchhoff général pour une configuration de contrôle en immersion représentée sur la Figure 5-9. La vitesse du fluide est de 1483 m/s pour les simulations des essais en eau à 24°C et à 2473 m/s pour les simulations des essais en sodium à 180°C. Les cibles sont représentées par des pièces planes (parallélépipédiques) de dimensions identiques à celles décrites au §5.3.2. Les cibles sont constituées d'acier inoxydable dont les paramètres structuraux sont les suivants :

- Masse volumique : 7900 kg/m³
- Vitesse des ondes longitudinales : 5650 m/s
- Vitesse des ondes transversales : 3060 m/s

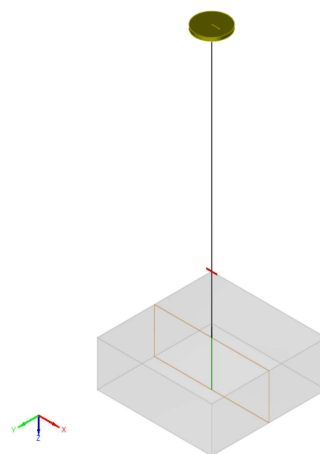


Figure 5-9: Configuration de contrôle CIVA pour la cible C1.

Durant les essais expérimentaux, les mesures sur chaque cible ont été effectuées en faisant un balayage angulaire du transducteur : le transducteur suit un mouvement de rotation autour de l'axe de son support. Au contraire, pour les simulations dans CIVA, ce balayage angulaire a été réalisé en faisant varier l'angle d'incidence, et le transducteur effectue donc un mouvement de rotation autour du point d'impact sur la surface des cibles. Les distances mesurées par les essais et par les simulations en dehors de la direction normale à la surface sont donc différentes, mais nous nous intéressons uniquement à la distance mesurée en incidence normale à la cible.

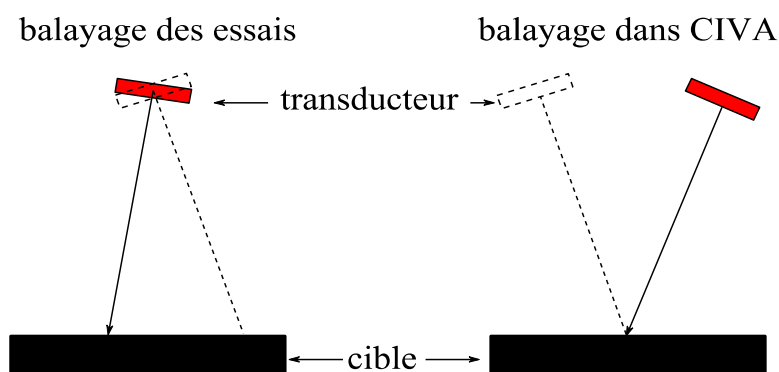


Figure 5-10 : Balayages effectués durant les essais expérimentaux et les simulations dans CIVA.

5.3.3.2 Signal d'entrée de la modélisation

Le capteur TUSHT est représenté par une pastille de diamètre constant de 30mm (diamètre effectif du capteur TUSHT) pour toutes les fréquences selon les études effectuées par les agents du CEA Cadarache. L'écho issu d'une mesure expérimentale à l'incidence normale à la surface de la cible C1 (cible étalon) a été choisi comme signal d'entrée de la modélisation CIVA [97]. Ce signal de référence est ensuite filtré avec un filtre passe bande aux fréquences de travail du capteur TUSHT : 0.7 – 1.4 – 2.2 – 2.9 et 4.5 MHz. Un exemple de signal avant filtrage est visible sur la Figure 5-11 : après le traitement de filtrage, on obtient cinq signaux de fréquences différentes, qui restent encore fortement bruités (cf. Figure 5-12).

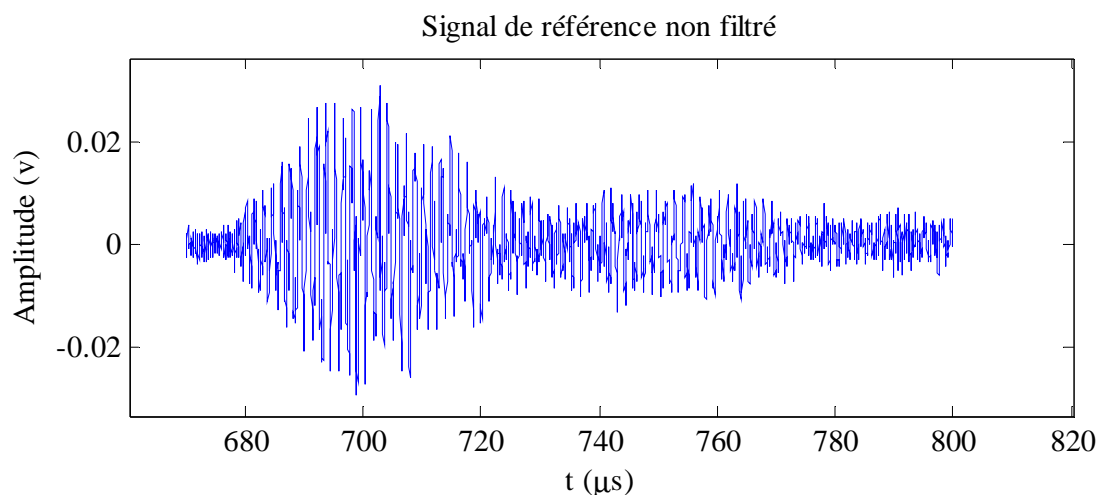


Figure 5-11 : Premier écho d'issue du signal expérimental avant filtrage à incidence normale sur la cible C1.

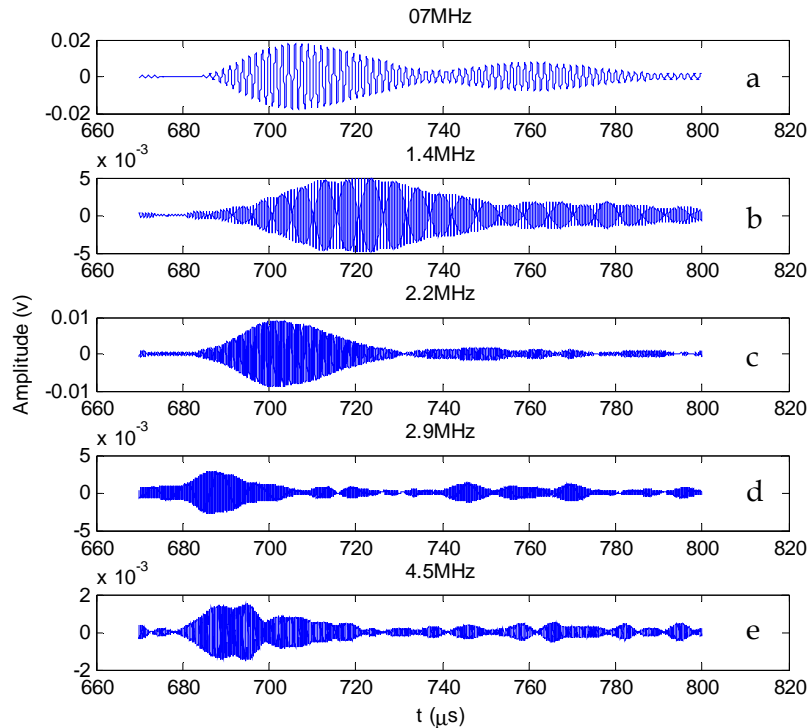


Figure 5-12: Signaux de référence à cinq fréquences différentes. a) :0,7 MHz , b) :1,4 MHz , c) :2,2 MHz , d) :2,9 MHz , e) :4,5 MHz.

5.3.4 Comparaison simulation/expérience

5.3.4.1 Détermination des « temps de vol » mesurés expérimentalement

La mesure de télémétrie revient à déterminer le temps nécessaire à une impulsion ultrasonore pour revenir sur l'émetteur-récepteur après interaction avec une structure. Lors des traitements des signaux d'essais, une procédure a été mise en place au CEA Cadarache en vue de la détermination des temps de vol expérimentaux : elle consiste à trouver le début du pic (illustré en Figure 5-13) du signal de rétrodiffusion mesuré par rapport à un seuil fixé qui est calculé en fonction de l'amplitude du bruit en amont du pic.

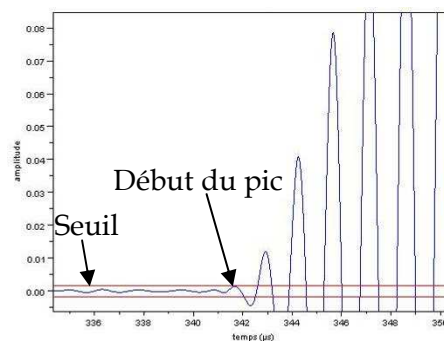


Figure 5-13 : Détermination du début du pic par seuillage

Cette méthode permet d'obtenir, si l'on travaille avec la valeur absolue du signal, une mesure du temps avec une précision d'une demi-alternance du signal, c'est-à-dire correspondant à une demi-longueur d'onde. Or la longueur d'onde, varie, dans l'eau, de 0,3 à 2 mm pour des fréquences diminuant de 4,5 à 0,7 MHz et dans le sodium à 180°C, de 0,6 à 3,6 mm. Afin d'améliorer la précision de la détermination du temps, on peut estimer le début du pic, par passage du seuil, en travaillant sur l'enveloppe du signal plutôt que sur le signal lui-même.

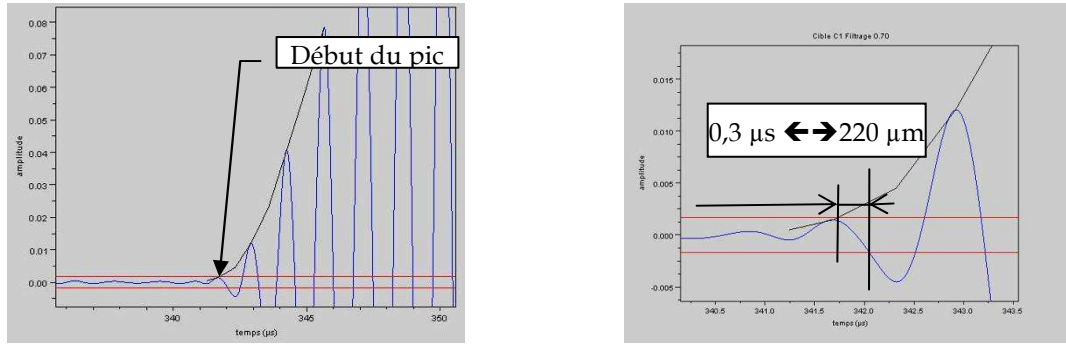


Figure 5-14 : Détermination du début du pic à l'aide de l'enveloppe des signaux.

Comme montré en Figure 5-14, la détermination de temps de vol consiste ainsi à trouver le point d'intersection entre le seuil et l'enveloppe du signal, ce qui permet d'avoir une valeur plus précise qu'en travaillant sur le signal initial. La détermination du temps de vol permet de retrouver la position des grandes cibles de référence (C1 à C3) dans la plage d'incertitude calculée (§5.3.2.3).

Cependant, dans CIVA, le temps de vol n'est pas déterminé de la même manière : il est déterminé à partir du temps de vol correspondant à l'amplitude maximale de l'écho reçu, avec une origine des temps ($t=0$) qui est également le temps correspondant à l'amplitude maximale du signal d'entrée (dit de référence). La précision de la simulation de temps de vol dans CIVA est alors de l'ordre d'une demi-longueur d'onde et est donc influencée par la fréquence d'échantillonnage du signal de référence car l'algorithme de CIVA d'extraction du temps de vol détermine ce temps au maximum d'enveloppe du signal. Pour avoir une meilleure précision de temps de vol, la méthode du produit de convolution est donc appliquée pour le calcul de temps de vol, ce dernier correspondant en effet au point où se trouve le maximum du produit de convolution du signal d'entrée et du signal reçu :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sig_ref}(t - \delta T) \bar{p}_x(t) dt = \max, \quad (5.24)$$

où $\text{Sig_ref}(t)$ est le signal d'entrée, $\bar{p}_x(t)$ est le signal reçu et δT est le temps de vol lorsque cette intégrale atteint une valeur maximale. Dans CIVA, un outil du traitement du signal permet de calculer le temps de vol d'un signal A-scan en utilisant ce principe, appelé « déconvolution paramétrique ».

5.3.4.2 Détermination de la célérité et de l'écho purement électroacoustique

Afin de mesurer la distance entre le transducteur et la surface de la cible visée à partir du temps de vol des échos reçus, la célérité lors de la mesure est déterminée à partir des mesures sur les cibles C1 et C2 de la façon suivante :

$$c_e = \frac{2(L_{C2} - L_{C1})}{T_{C2} - T_{C1}}, \quad (5.24)$$

où $L_{C1} = 249,87$ mm et $L_{C2} = 599,98$ mm sont les distances transducteur/cible mesurées par métrologie respectivement pour les cibles C1 et C2, et où T_{C1} et T_{C2} sont respectivement les temps de vol mesurés issus du tir selon la normale aux cibles C1 et C2.

Dans le signal d'écho reçu, il faut compter le décalage temporel lié D_{Cx} au temps de réponse de l'électronique et du traducteur en émission -réception sur la cible Cx . La distance associée à ce retard peut être évaluée avec la formule suivante :

$$D_{Cx} = L_{Cx} - c_e T_{Cx} / 2, \quad (5.24)$$

où L_{Cx} et T_{Cx} sont respectivement la distance et le temps de vol mesurés sur une cible Cx étalon.

Une fois les deux grandeurs c_e et D_{Cx} obtenues, le calcul de la distance à la cible Cx se fait avec la formule suivante :

$$L_{Cx} = c_e T_{Cx} / 2 + D_{Cx}, \quad (5.24)$$

où T_{Cx} est fourni par les essais.

5.3.4.3 Mesures et validations expérimentales en eau

5.3.4.3.1 Mesure de directivité et position de cibles

Aux fréquences utilisées, la cible CD est vue par les ultrasons quasiment comme un réflecteur ponctuel (voir la Figure 5-15). Elle est donc adaptée à la mesure de directivité du transducteur employé.



Figure 5-15 : (a) Position des cibles et du traducteur lors des mesures sur CD ; (b) photo de la cible CD.

L'amplitude de l'onde réfléchie dépend de la longueur d'onde acoustique λ c'est à-dire, à célérité c des ultrasons fixée, de la fréquence f . La fonction de directivité du traducteur s'écrit en fonction de l'angle θ par rapport la normale à la surface émettrice :

$$D(\theta) = \frac{2J_1(2\pi \sin \theta a / \lambda)}{2\pi \sin \theta a / \lambda} \quad (5.25)$$

où J_1 est la fonction de Bessel cylindrique de premier ordre et où a désigne le rayon de la surface émettrice. Cette dernière fonction est illustrée en Figure 5-16. Le maximum d'amplitude est obtenu pour la direction de réflexion spéculaire $\theta = 0$. Si l'axe acoustique du traducteur n'est pas parfaitement perpendiculaire à sa face émettrice, on définit un angle pour lequel le maximum d'amplitude est obtenu. Cet angle est appelé angle de **bigle**. La connaissance de cet angle peut permettre de corriger la désorientation du transducteur lorsqu'il vise les différentes cibles.

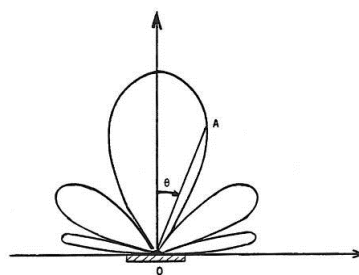


Figure 5-16 : Directivité d'un transducteur ultrasonore plan.

Pendant les essais, l'axe du traducteur est pointé vers le centre de CD. En faisant tourner le traducteur TR de $\pm 2^\circ$, par pas de $0,1^\circ$, le maximum d'amplitude a été cherché. Observons

l'évolution de l'amplitude du signal reçu en fonction de la rotation du traducteur (TR) en Figure 5-17. On obtient un nuage de points qui suit un profil présentant un maximum.

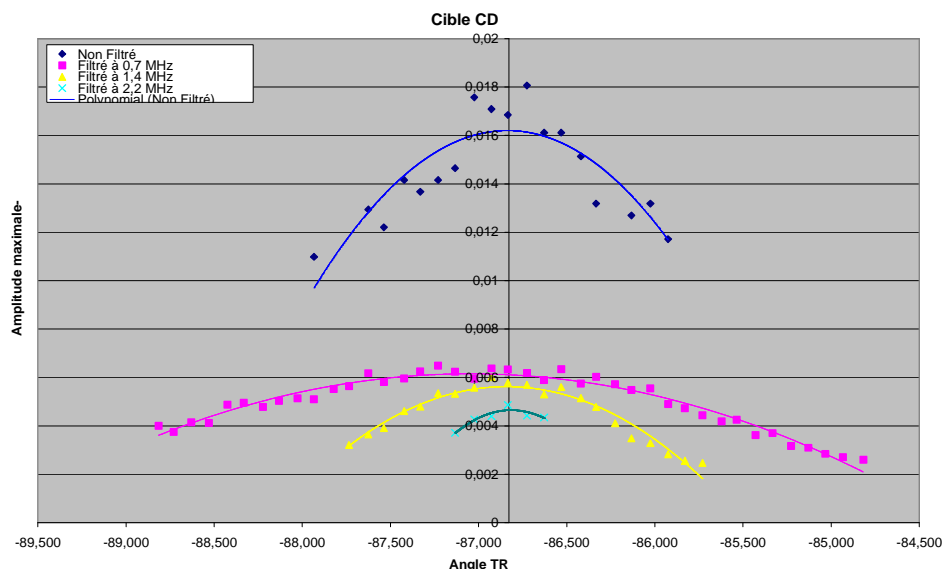


Figure 5-17 : Amplitude du signal mesuré sur la cible « CD »

Pour améliorer l'analyse, une régression polynomiale d'ordre 2 est effectuée sur chaque nuage de points. En calculant la valeur maximale de chacune de ces courbes, on place l'angle de bigle en eau à : $-0,22^\circ$ pour la fréquence égale à 0,7 MHz, $-0,02^\circ$ pour la fréquence égale à 1,4 MHz, $+0,01^\circ$ pour la fréquence égale à 2,2 MHz.

5.3.4.3.2 Mesures expérimentales des amplitudes sur les cibles de grande dimension C1, C2, C3

Pour la mesure sur la cible C1, on oriente l'axe acoustique du traducteur (déterminé par la mesure de directivité sur la cible CD) perpendiculairement à la cible. On balaye angulairement le traducteur TR de $\pm 3^\circ$ autour de l'axe de la cible (avec un pas de $0,1^\circ$). En Figure 5-18, on représente l'évolution de l'amplitude du signal rétrodiffusé sur la cible C1. Le signal brut (non filtré) est saturé.

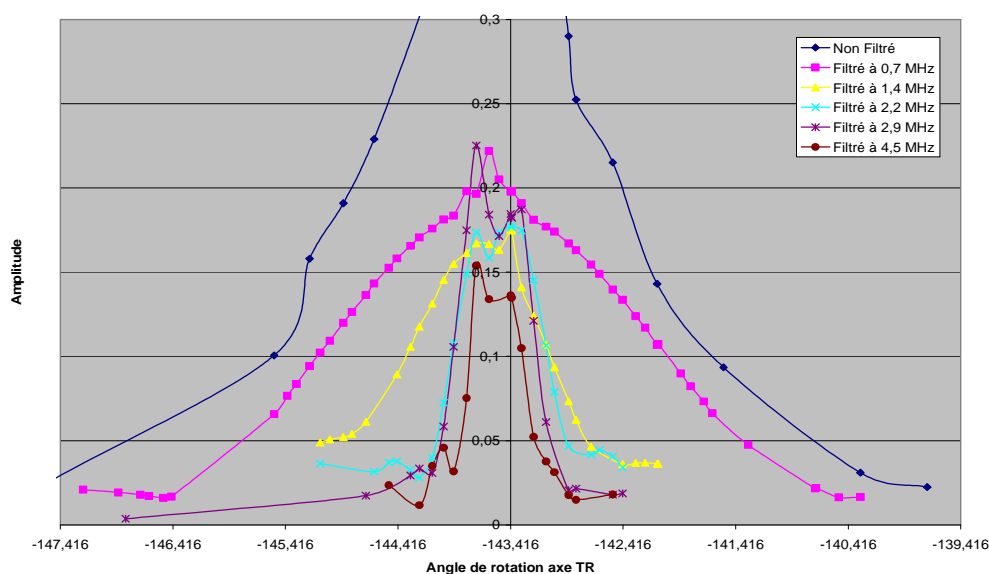


Figure 5-18 : Evolution de l'amplitude mesurée avec la rotation du traducteur US pour les tirs sur la cible C1.

Approchant la courbe du signal filtré à 0,7 MHz par un polynôme, on trouve un maximum d'amplitude à $-0,18^\circ$ soit à peu près l'angle de bigle mesuré précédemment (§5.3.4.3.1). La valeur maximale d'amplitude A_{\max} est de 0,220 V. Afin d'estimer dans quelle zone angulaire autour de l'incidence normale, les cibles peuvent être détectées expérimentalement avec précision, un critère à -6 dB peut être fixé. A 0,7 MHz, cette zone effective à -6 dB représente une plage angulaire de $\pm 1,5^\circ$ autour de la normale à la cible. Les résultats des toutes les signaux filtrés sont montrés dans le Tableau 5-3. Et on constate que, pour les quatre dernières fréquences, on ne retrouve pas exactement l'angle de bigle mesuré ($-0,02^\circ$ pour la fréquence égale à 1,4 MHz, $+0,01^\circ$ pour la fréquence égale à 2,2 MHz).

Tableau 5-3 : Résultats des essais sur la cible C1 : Amplitudes maximales de chaque signal filtré, l'angle correspondant à l'amplitude maximale ainsi que l'angle pour lequel l'amplitude diminue de -6dB par rapport à l'amplitude maximale.

Fréquence (MHz)	0,7	1.4	2.2	2.9	4.5
A_{\max} (V)	0,220	0,175	0,177	0,225	0,154
Angle A_{\max} ($^\circ$)	-0,18	-0,22	-0,10	-0,13	-0,15
zone à -6dB ($^\circ$)	$\pm 1,5$	$\pm 0,7$	$\pm 0,5$	$\pm 0,5$	$\pm 0,3$

La même analyse a été reconduite pour les cibles C2 et C3 : les deux cibles sont rigoureusement identiques et situées à la même distance du transducteur 600 mm. La comparaison des mesures sur C2 et C3 permet de tester la reproductibilité de l'essai. L'évolution des amplitudes mesurées sur les deux cibles est illustrée en Figure 5-19 ; logiquement, on trouve les mêmes résultats pour les deux cibles.

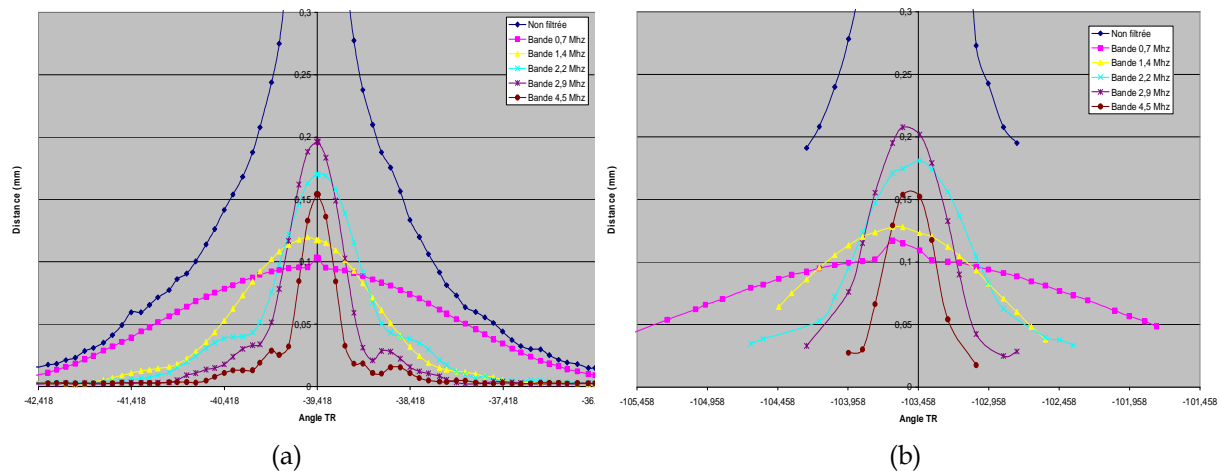


Figure 5-19 : Evolution de l'amplitude avec la rotation du traducteur : (a) C2 ; (b) C3.

En comparant avec les résultats des mesures sur la cible C1 (voir la Figure 5-18), on constate une diminution significative d'amplitude pour les signaux aux basses fréquences : $f=0,7$ MHz et $f=1,4$ MHz ; en revanche, pour les autres signaux, les amplitudes restent à des niveaux comparables à celles obtenues sur la cible C1. Les amplitudes maximales de chaque fréquence sont présentées dans le Tableau 5-4.

Tableau 5-4 : Résultats des essais sur la cible C2 : Amplitudes maximales de chaque signal filtré, l'angle correspondant à l'amplitude maximale ainsi que l'angle pour lequel l'amplitude diminue -6dB par rapport à l'amplitude maximale.

Fréquence (MHz)	0,7	1.4	2.2	2.9	4.5
C2 : A_{\max} (v)	0,10	0,12	0,17	0,197	0,154
C3 : A_{\max} (v)	0,10	0,12	0,18	0,21	0,154
C2 : Angle A_{\max} (°)	-0,01	-0,10	+0,01	-0,01	-0,00
C3 : Angle A_{\max} (°)	-0,14	-0,15	-0,02	-0,06	0,06
C2 : -6dB zone (°)	$\pm 1,6$	$\pm 0,8$	$\pm 0,45$	$\pm 0,35$	$\pm 0,25$
C3 : -6dB zone (°)	$\pm 1,7$	$\pm 1,5$	$\pm 0,50$	$\pm 0,50$	$\pm 0,25$

Pour les validations expérimentales en termes d'amplitude, nous allons comparer les amplitudes maximales mesurées sur la cible C2 avec les valeurs obtenues par les simulations dans CIVA en prenant les valeurs mesurées sur la cible C1 comme références en amplitude et ce pour chaque fréquence. Les écarts entre les essais et les simulations dans CIVA sont montrés dans le Tableau 5-5.

Tableau 5-5 : Comparaisons calcul/essai des amplitudes.

Freq (MHz)	Manip (C2) (dB)	Manip (C3) (dB)	CIVA (dB)	Ecart (dB) CIVA/Manip(C2)
0,7	-6,9	-6,9	-6,4	0,5
1,4	-3,3	-3,3	-1,6	1,7
2,2	-0,4	0,2	4,2	4,6
2,9	-1,2	-0,6	-7,5	6,3
4,5	0,00	0,00	1,6	1,6

Tout d'abord, pour vérifier la reproductibilité des essais, nous comparons les résultats de C2 et C3, pour lesquels un écart maximal de 0,6 dB est identifié à 2,9 MHz. Pour les comparaisons essai/simulation, on trouve des faibles écarts en basses fréquences $f = 0,7$ MHz et $f = 1,4$ MHz. L'écart devient important pour les valeurs aux hautes fréquences. En effet, à partir de 2,2 MHz, la cible C1 (250 mm) se situe en champ proche du transducteur (voir Figure 5-20). En effet la modélisation du champ de propagation est délicate en champ proche, car dans cette zone il y a une interférence des ondes géométriques planes provenant de la surface du capteur et des ondes de diffraction des bords du traducteur : dans cette zone, l'hypothèse de fronts plans du champ n'est pas respectée. Une autre source d'erreur en champ proche provient du choix de la valeur du diamètre effectif du transducteur ; en effet, en champ proche, la distribution d'énergie acoustique dépend fortement du diamètre du transducteur. En Figure 5-20, on illustre deux profils d'amplitude du champ généré par un transducteur circulaire de diamètre 30 mm (courbe noire) et 31mm (courbe rouge) à 2,9 MHz. On peut constater qu'à une distance du capteur de 250 mm (cas de la cible C1), l'amplitude diminue de 6 dB (de -8,9 dB à -15 dB) si le diamètre passe de 30 mm à 31mm. Si le diamètre effectif du transducteur en essai n'est pas exactement 30 mm (celui entré en simulation), nous pouvons avoir des erreurs dans la comparaison du Tableau 5-5 pour les fréquences de 2,2 MHz à 4,5 MHz.

Donc si on ne maîtrise pas le diamètre effectif du transducteur, il faut donc mieux placer la cible de référence au delà de la limite du champ proche. Néanmoins, le positionnement de cette cible est mieux adapté à une télémétrie en sodium qu'à une télémétrie en eau comme on le verra par la suite.

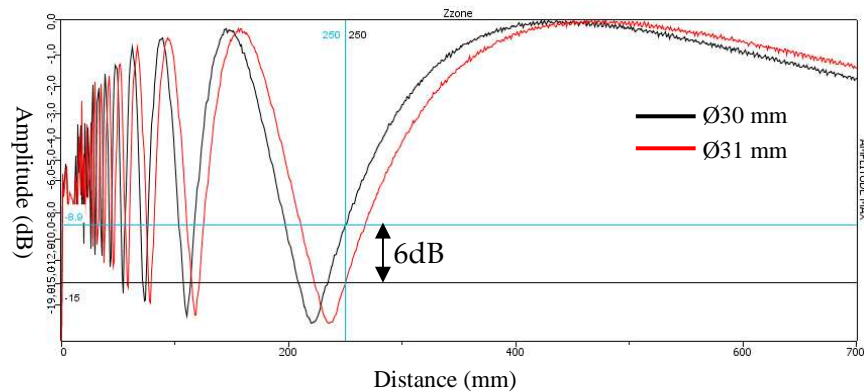


Figure 5-20 : Profils de l'amplitude du champ généré par un transducteur (en dB) de diamètres effectif de 30 mm (la courbe noire) et de 31mm (courbe rouge).

5.3.4.3.3 Validations expérimentales sur le temps de vol en eau

Comme déjà indiqué, le but de la télémétrie est de mesurer la distance des cibles à partir des temps de vol des échos rétrodiffusés et de la célérité en milieu de propagation.

La Figure 5-21 représente la distance traducteur-cible C1 lorsque l'on fait varier d'angle d'incidence du traducteur. La ligne bleue horizontale en grands pointillés au milieu symbolise la distance traducteur/cible déterminée par métrologie soit pour C1 : $249,871 \pm 0,02$ mm. Rappelons que l'incertitude globale est de $\pm 144 \mu\text{m}$ d'après l'étude d'incertitudes (elle est représentée dans la figure par deux lignes bleues horizontales en petits pointillés autour de la distance déterminée par métrologie).

On remarque que la distance mesurée expérimentalement à 0,7 MHz est décalée des autres signaux : on retrouve la distance à $440 \mu\text{m}$ près seulement. Une analyse détaillée ne permet toutefois pas de retrouver l'origine de ce décalage. En contrepartie, le signal filtré respectivement à 1,4 / 2,2 / 2,9 et 4,5 MHz permet, aux maxima d'amplitude, de retrouver expérimentalement la distance traducteur-cible à mieux que $130 \mu\text{m}$ près, donc dans la plage d'incertitude de $144 \mu\text{m}$ mesurée en métrologie.

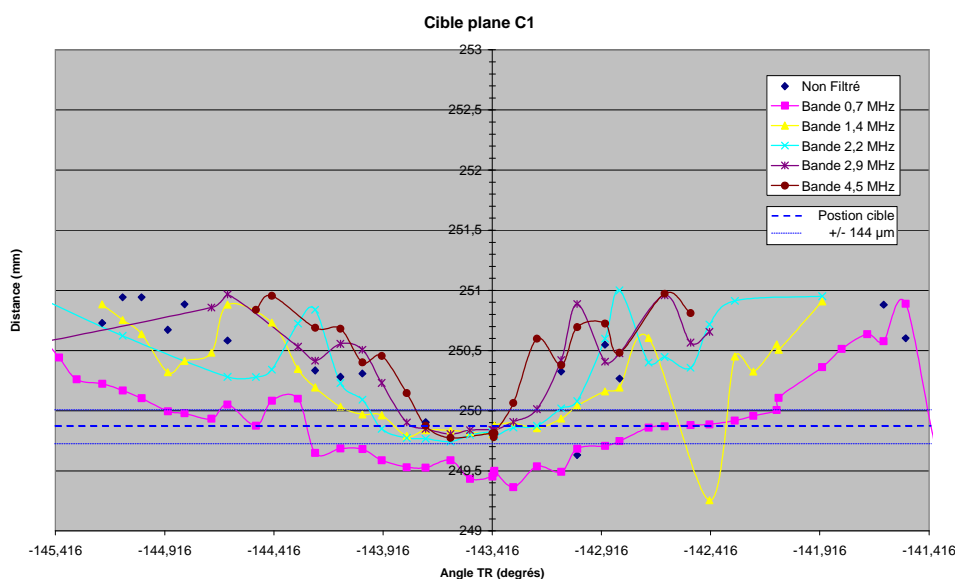


Figure 5-21 : Mesure expérimentale de la distance de C1 par seuillage sur l'enveloppe du signal expérimental.

Nous avons calculé les temps de vol (cf. Figure 5-22) des échos dans CIVA à différentes fréquences avec la méthode du produit de convolution, et remarquons que pour la direction d'incidence normale (angle de tir = 0°), la distance est bien estimée par les simulations avec

une erreur maximale de 25 μm . En dehors de la direction normale à la surface, la simulation donne des valeurs inférieures à la distance de la cible, ce qui est dû à la différence de mode de balayage entre les essais et les simulation (voir la Figure 5-10).

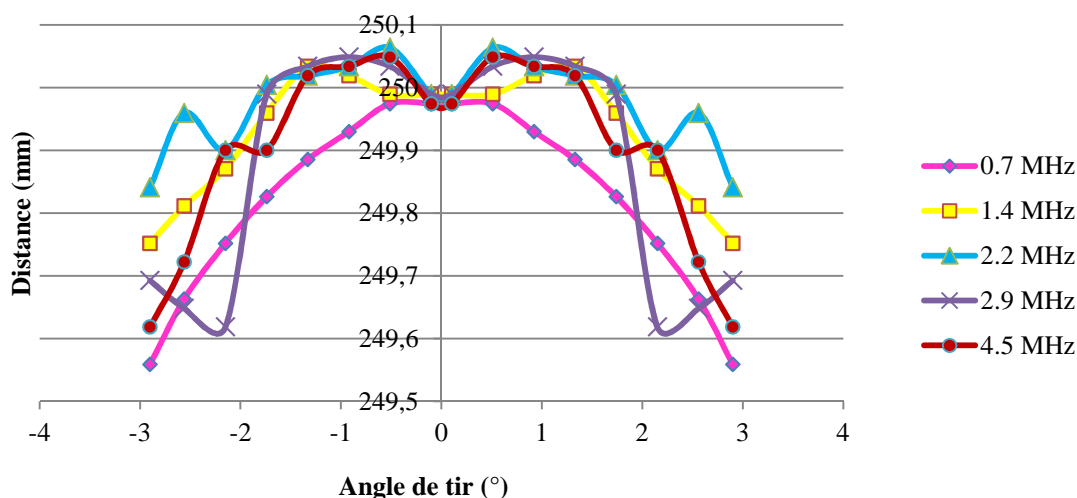


Figure 5-22 : Mesure de la distance de C1 à partir des calculs des temps de vol des échos dans CIVA.

La distance traducteur-cible C2 déterminée à partir des données expérimentales est représentée en Figure 5-23 lorsque l'on fait varier l'angle d'incidence du traducteur. L'incidence normale, mesurée par métrologie tridimensionnelle, est à -39.42° et la distance traducteur-cible pour cette position est de 599,984 mm.

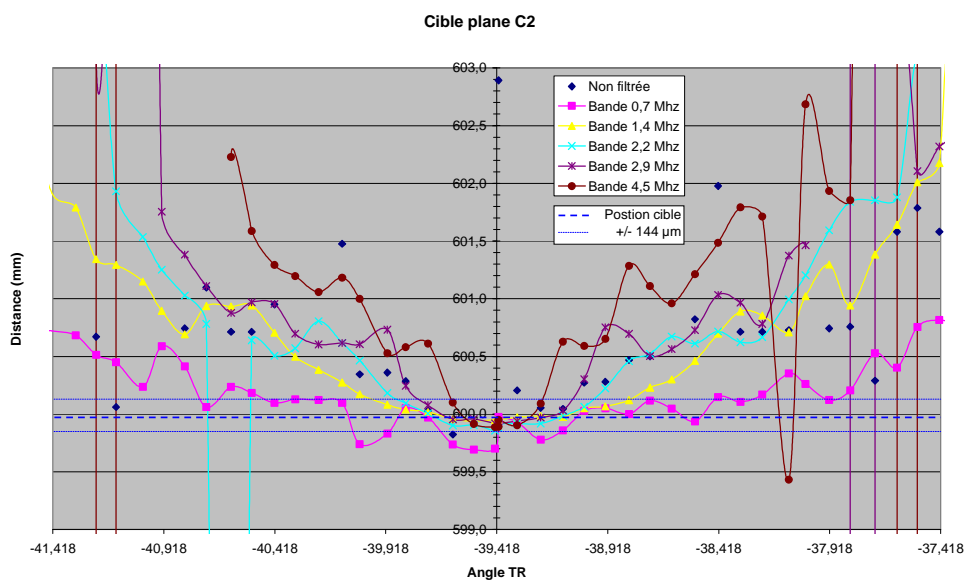


Figure 5-23: Mesure expérimentale de la distance de C2 par seuillage sur l'enveloppe du signal expérimental.

Pour cette cible, la distance de la cible est également bien estimée dans la direction normale à la surface de la cible à toutes les fréquences.

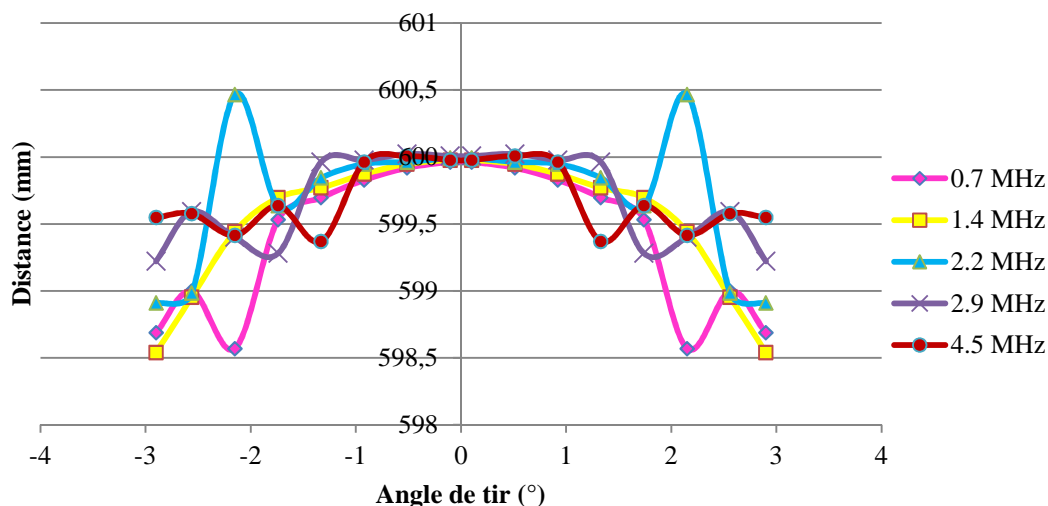


Figure 5-24 : Mesure de la distance de C2 à partir des calculs des temps de vol des échos dans CIVA.

La cible PT est en fait un petit triangle entièrement insonifié lorsque le traducteur le vise en incidence normale. Cette cible est située d'après la métrologie à 619,831 mm du transducteur et donc en champ lointain de celui-ci pour toutes les fréquences d'analyse.

La mesure expérimentale de distance permet de retrouver la position réelle de PT à l'incertitude près lorsque l'on vise la normale. On constate que dans la direction normale ($TR = -63,48^\circ$) seul le résultat à 0,7 MHz ne se trouve pas dans la plage d'incertitude de $\pm 144 \mu\text{m}$.

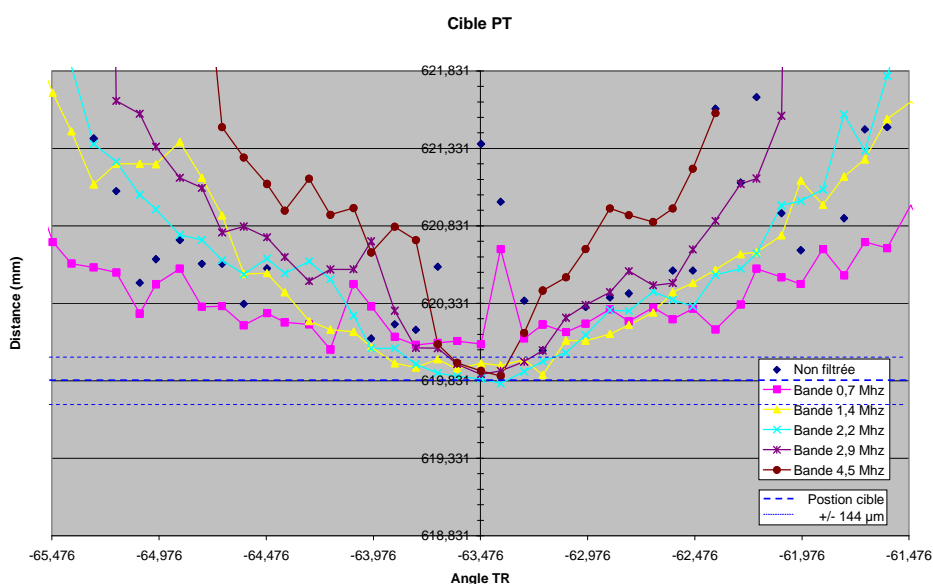


Figure 5-25 : Mesure de la distance de PT par seuillage sur l'enveloppe du signal expérimental

Pour les simulations dans CIVA, la distance a été précisément prédite à chaque fréquence (voir la Figure 5-26) avec une erreur maximale de $17 \mu\text{m}$.

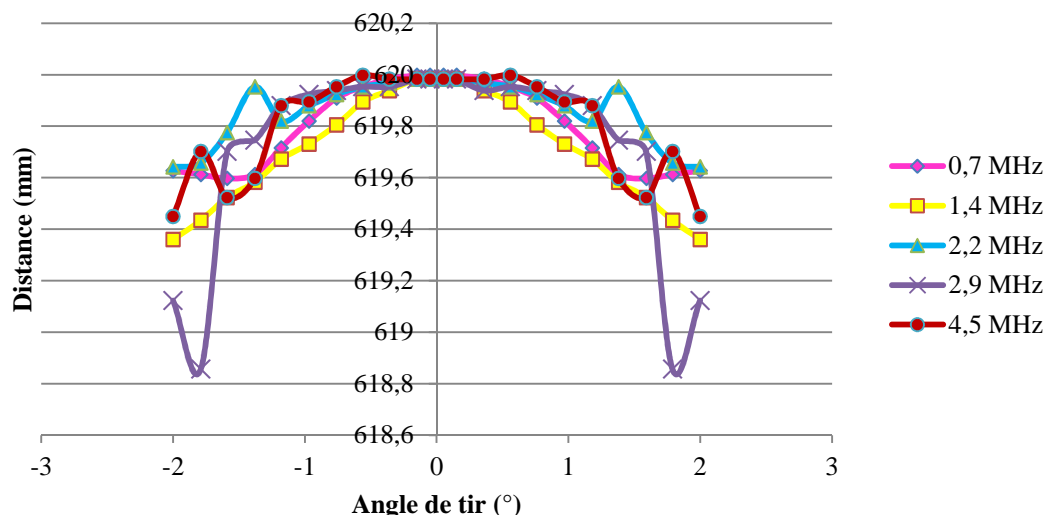


Figure 5-26 : Mesure de la distance de la cible PT à partir des calculs des temps de vol des échos dans CIVA.

5.3.4.4 Résultat des mesures en sodium

Les essais de la télémétrie en sodium ont été réalisés par CEA/DEN à Cadarache dans l'installation DOLMEN (**D**ouble **L**atitude de **M**esures en **N**a), mise en service en 1980, qui permet la réalisation d'essais de composants en sodium, de remplissage et mouillage en sodium de maquettes représentatives de rétentions des réacteurs à neutrons rapides refroidis au sodium (RNR Na) pour des essais de carbonatation, ainsi que des essais technologiques en sodium. Elle est conçue pour fonctionner à une température maximale de 600°C et une pression de service de 30 à 60 mbar (maxi 450 mbar). La température du sodium est fixée à 180°C pendant les essais sur le « MULTIREFLECTEUR ».

Nous avons extrait les données des essais expérimentaux en sodium fournies par CEA/DEN. En Figure 5-27, nous montrons un exemple du signal avant filtrage d'écho mesuré sur la cible C1 en sodium à 180°C.

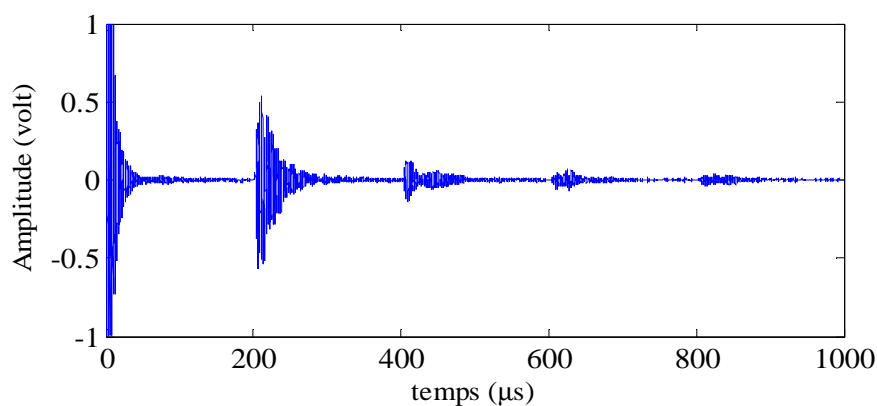


Figure 5-27 : Signal brut reçu issu de la mesure à incidence normale sur la cible C1 en sodium à 180°C.

Nous avons appliqué un filtre de Butterworth par fréquence propre du TUSHT pour obtenir des signaux à 0,7 - 1,4 - 2,2 - 2,9 et 4,5 MHz comme montré en Figure 5-28.

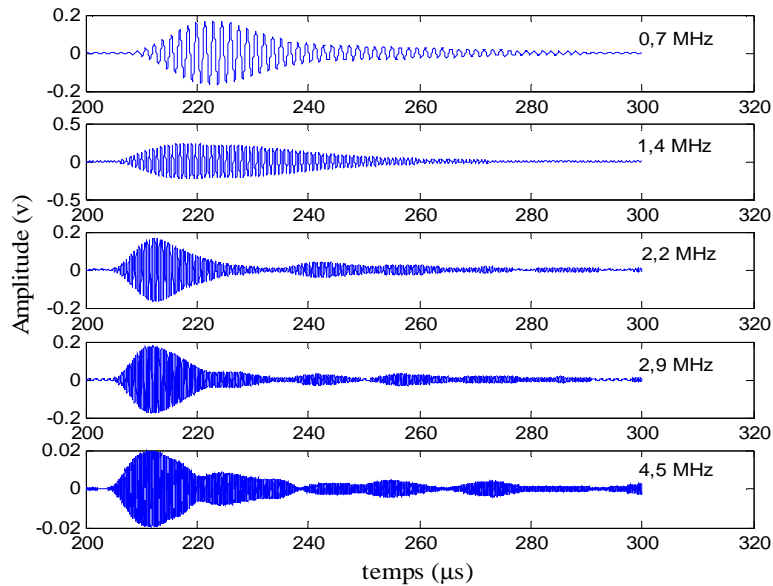


Figure 5-28 : signaux expérimentaux sur la cible C1 filtrés

Ces signaux filtrés servent de signaux de référence pour la simulation dans CIVA.

Validations expérimentales en termes d'amplitude sur les cibles de grande dimension C1 et C2 en sodium liquide

Les essais sur la cible C1 et C2 sont effectués avec un balayage angulaire de $\pm 6^\circ$ autour de la normale à la surface des cibles avec un pas de $0,1^\circ$. A partir des signaux expérimentaux filtrés, nous avons extrait les amplitudes de chaque tir à toutes les fréquences, les résultats des mesures sur la cible C1 sont montrés en Figure 5-29. Nous pouvons constater, pour chaque fréquence, que la position où se trouve l'amplitude maximale correspond bien à la normale à la surface de la cible, c'est-à-dire $-142,53^\circ$ (indiquée par un trait noir en pointillés). Notons que les paramètres d'acquisition, notamment le gain, ont été adaptés pour les mesures en sodium et ce en fonction des cibles. La comparaison en amplitude avec les mesures réalisées en eau doit tenir compte des gains respectifs utilisés.

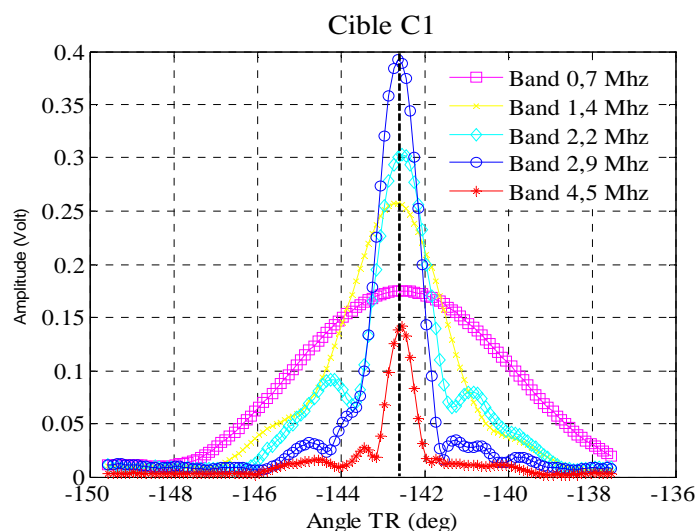


Figure 5-29 : Evolution de l'amplitude mesurée avec la rotation du traducteur US pour les tirs sur la cible C1.

Les amplitudes issues des mesures sur la cible C2 sont montrées en Figure 5-30. Les amplitudes maximales de chaque fréquence se trouvent également à la normale à la surface C2 déterminée par la métrologie, c'est-à-dire à $-38,48^\circ$.

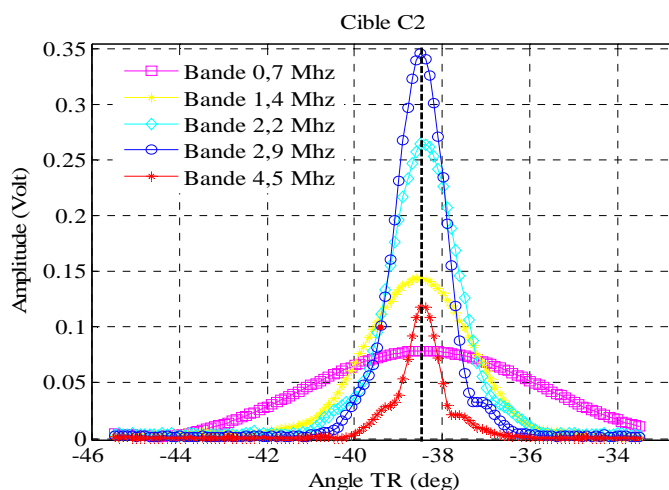


Figure 5-30 : Evolution de l'amplitude mesurée avec la rotation du traducteur US pour les tirs sur la cible C2.

La validation calcul/essai consiste à étudier la cible C2 en prenant C1 comme référence en amplitude et donc à comparer le rapport d'amplitude maximale entre les mesures et les simulations sur les cibles C1 et C2 pour une fréquence donnée. Les amplitudes maximales des données expérimentales sont obtenues avec le tir suivant la normale à la surface des cibles, comme montré en Figure 5-29 et Figure 5-30. Dans CIVA, nous avons simulé les échos de surface des cibles C1 et C2 en incidence normale pour chaque fréquence (de 0,7 MHz à 4,5 MHz). La célérité en sodium a été fixée à 2473m/s, valeur mesurée lors de l'étalonnage des essais. Ensuite, nous comparons le gain d'amplitude entre les résultats des essais et des simulations pour une fréquence donnée. Les comparaisons sont données dans le Tableau 5-6. Nous pouvons remarquer que l'écart maximal de 2,5 dB obtenu (à 4,5 MHz) entre l'essai et la simulation en sodium est deux fois inférieur à celui en eau : 6,3 dB (à 2,9 MHz). Globalement, il y a des bons accords entre les essais et les simulations en sodium bien que la cible C1 se situe en champ proche du transducteur à 2,2/2,9 et 4,5 MHz.

Tableau 5-6 : Comparaisons calcul/essai des amplitudes en sodium liquide à 180°C.

Freq (MHz)	Manip (dB)	CIVA (dB)	Ecart (dB) CIVA/Manip
0,7	6,9	7,1	0.2
1,4	5,1	5,6	0.5
2,2	1,2	2,9	1.7
2,9	1,1	-0,4	1.5
4,5	1,6	-0,9	2.5

5.3.4.4.1 Comparaison essais/calcul des distances sur les cibles C1, C2, PT en sodium liquide.

En appliquant la règle de la détermination de temps de vol décrit dans §5.3.4.1, nous avons pu extraire les temps de vol expérimentaux pour chaque tir. En revanche, les temps de vol exploitables restent dans la zone $\pm 3^\circ$ autour de la normale ; en dehors de cette zone, puisque le rapport signal sur bruit est très faible, on ne peut pas déterminer de temps de vol pour ces tirs par seuillage sur l'enveloppe du signal.

Afin de calculer les distances mesurées par télémétrie avec la formule (5.24) présentée au §5.3.4.2, nous devons déterminer la célérité C_e en sodium pour chaque fréquence avec la formule (5.24) ainsi que la distance D_{Cx} d'ajustement liée au retard électronique de l'instrument d'acquisition en utilisant la relation (5.24). Les résultats sont présentés dans le Tableau 5-7 pour les distances d'ajustement respectives D_{C1} et D_{C2} .

Tableau 5-7 : La célérité en sodium liquide déterminée à partir des mesures sur les cible C1 et C2, et les distances d'ajustement liées au retard électronique de l'instrument d'acquisition.

Fréq (MHz)	Célérité C_e (m/s)	D_{C1} (mm)	D_{C2} (mm)
0,7	2474	-2,3	-2,3
1,4	2476,6	-2,2	-2,2
2,2	2477,5	-2,1	-2,1
2,9	2476,6	-2,1	-2,1
4,5	2477,5	-2,3	-2,3

Une fois les célérités en sodium C_e et les distances D_{cx} liées aux retards obtenues, les distances capteur/cible peuvent être déterminées.

Nous présentons en Figure 5-31 les distances capteur/cible déterminées à partir des mesures sur les cibles C1 aux différentes fréquences filtrées. La distance de la cible, déterminée par la métrologie, est égale à 249.94 mm, représentée par la ligne noire horizontale. Les deux lignes vertes foncées représentent la plage d'incertitude $\pm 94 \mu\text{m}$ déterminée avant (§5.3.2.3). Nous constatons sur la Figure 5-31 que les distances déterminées aux différentes fréquences filtrées se situent tous dans la plage d'incertitude. La cible C1 est donc bien localisée en sodium par le transducteur.

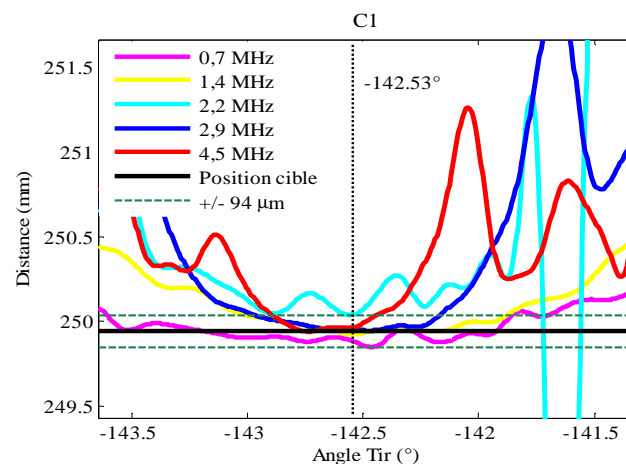


Figure 5-31 : Mesure de la distance de C1 par seuillage sur l'enveloppe du signal expérimental.

Dans la Figure 5-32, les mesures de distance par la simulation dans CIVA sont représentées à différentes fréquences de travail. Nous constatons une erreur maximale à l'incidence normale de $70 \mu\text{m}$ à 0,7 MHz par rapport à la distance théorique 250 mm. Pour les autres fréquences, les erreurs sont inférieures à $20 \mu\text{m}$.

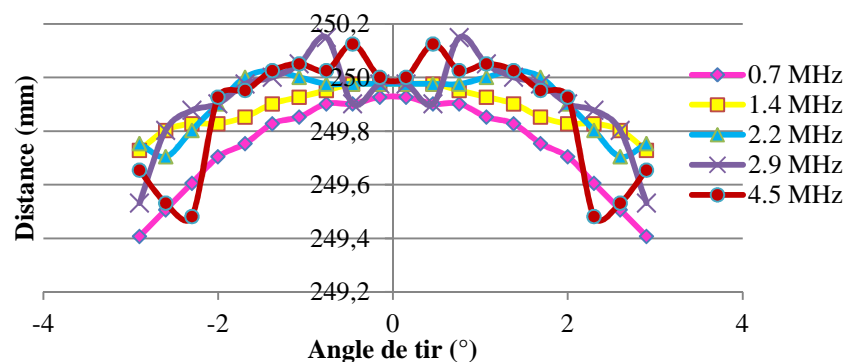


Figure 5-32 : Mesure de la distance de C1 en sodium à partir des calculs des temps de vol des échos dans CIVA.

Les mesures expérimentales de distance sur la cible C2 sont représentées en Figure 5-33. La position exacte de la cible 600,135 mm est représentée par une ligne noire horizontale, et la plage d'incertitude est définie par les deux lignes vertes foncées comme dans la Figure 5-31. Dans la direction normale à la cible ($-38,48^\circ$), nous remarquons que toutes les valeurs mesurées se trouvent dans la plage d'incertitude symbolisée par les pointillés gris.

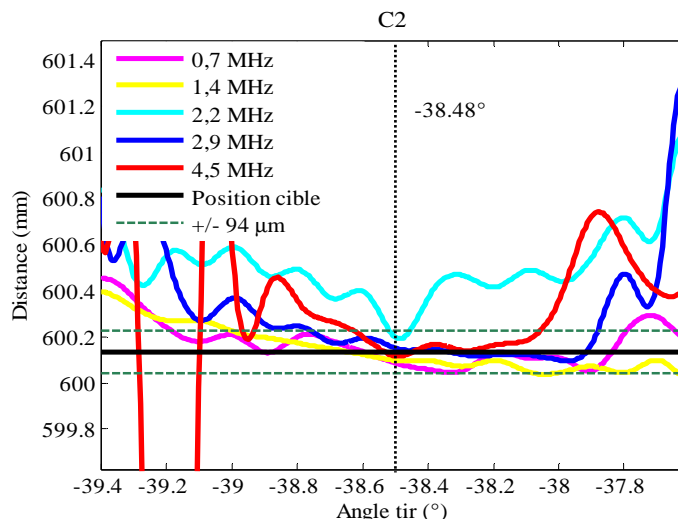


Figure 5-33: Mesure de la distance de C2 par seuillage sur l'enveloppe du signal expérimental en tenant compte de la distance liée au retard électronique.

Les simulations de la distance de la cible C2 sont montrées en Figure 5-34, on trouve que l'erreur maximale par rapport à la distance théorique 600 mm à l'incidence normale est de 100 μm à 0,7 MHz et à 2,9 MHz. Aux autres fréquences, les erreurs sont inférieures à 50 μm .

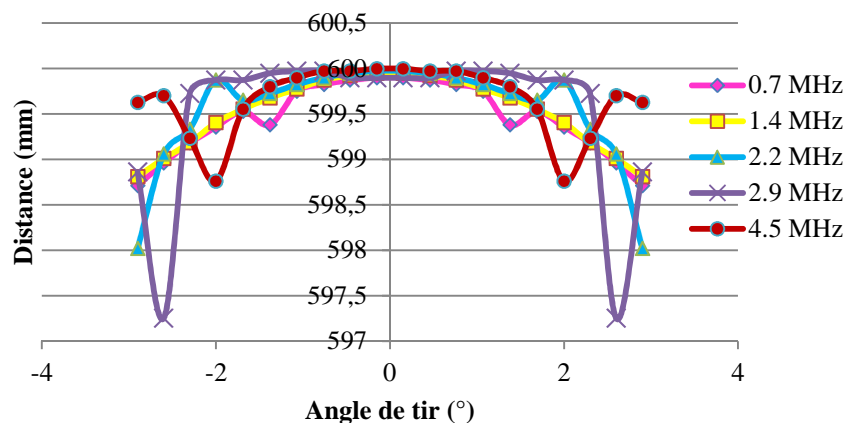


Figure 5-34 : Mesure de la distance de C2 en sodium à partir des calculs des temps de vol des échos dans CIVA.

Pour les validations en sodium, nous avons obtenu des écarts entre la simulation et l'expérience plus petits que ceux obtenus en eau car la cible C1 (servant de référence en amplitude) se situe complètement en champ proche du transducteur uniquement à 4,5 MHz, alors qu'en eau c'est le cas aux trois plus grandes fréquences. En revanche, les estimations des distances de cibles avec les échos simulés en sodium sont moins précises qu'en eau car l'erreur d'estimation est liée à la longueur d'onde du signal et en sodium la longueur d'onde est 1,66 fois supérieure à celle en eau.

5.4 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Après une courte introduction des modules de propagation en milieu fluide et de réponse de défauts dans CIVA, nous avons présenté l'intégration dans le logiciel CIVA d'un

modèle complet de simulation de la télémétrie. Pour la simulation du champ de propagation en sodium liquide subissant des variations aléatoires de température, l'aberration aléatoire de phase a été intégrée et couplée avec le modèle de propagation en milieu fluide homogène existant dans CIVA ; cela a été réalisé par modification des temps de vol calculés en milieu homogène. Pour la partie interaction faisceau/cible, le modèle de Kirchhoff général a été intégré. La formulation 3D du modèle de Kirchhoff général a été mise au point ; nous en avons déduit un facteur de directivité de diffusion en onde sphériques caractérisant le champ diffusé par une cible 3D de dimension finie, qui a été intégré dans la formulation décrivant l'écho reçu au niveau du transducteur.

Pour valider expérimentalement les modèles développés, des mesures expérimentales ont été réalisées sur les cibles installées sur la maquette « MULTIREFLECTEUR » en eau (24°C) ainsi qu'en sodium (180°C). Les mesures sur une cible consistent à effectuer un balayage angulaire autour de la normale à sa surface. Les signaux reçus ont été filtrés en utilisant un filtre passe bande et ce aux cinq fréquences correspondant aux fréquences de travail du transducteur. Les amplitudes et les temps de vol de chaque tir ont été relevés à chaque fréquence. En parallèle, des simulations de télémétrie en eau et en sodium ont été réalisées dans CIVA avec uniquement les configurations correspondant aux cibles C1, C2, et PT pour le moment. Les signaux filtrés issus du tir à incidence normale sur la cible C1 ont été choisis comme signaux d'entrée respectifs des simulations.

Les validations en termes d'amplitude sur la cible C2 fournissent des résultats satisfaisants en basse fréquence : 0,7 MHz et 1,4 MHz. Au-delà, des écarts plus importants entre les simulations et les essais ont été constatés. En effet, à partir de 2,2 MHz, la cible d'étalonnage C1 se situe dans le champ proche du transducteur et la simulation du faisceau en champ proche est délicate. De plus, la connaissance imprécise du diamètre effectif du transducteur est également une source d'erreur. En revanche, les validations en amplitude des télémétries en sodium sont plus satisfaisantes car la distance de champ proche est plus courte dans le sodium que dans l'eau pour une fréquence donnée. En effet, pour les mesures en sodium, la cible se situe complètement en champ proche uniquement à 4,5 MHz.

Les validations en termes de temps de vol consistent à comparer les distances transducteur/cibles issues des temps de vol des échos expérimentaux et simulés. Les meilleurs résultats sont obtenus dans l'eau : les erreurs par rapport aux distances théoriques de cibles sont inférieures à 25 μm . Pour les simulations en sodium, les erreurs sont relativement élevées à basse fréquences, entre 70 et 100 μm car l'erreur d'estimation de distance est liée à la longueur d'onde et car, en sodium, la longueur d'onde est 1,66 fois supérieure à celle en eau.

En perspective, nous pourrions poursuivre les validations expérimentales pour les autres cibles : le triplan TP, la diffraction par un bord de la cible RR, ainsi que la réflexion multiple avec la cible RR et la cible CR. Des essais de la télémétrie dans un milieu inhomogène (sodium à haute température) pourraient être également effectués.

CONCLUSION

L'objectif de la thèse est de développer des modèles physiques pour répondre aux besoins de la simulation complète de la télémétrie ultrasonore, une technique employée pour la surveillance des réacteurs sodium à neutrons rapides. Les modèles développés durant ces travaux de thèse permettent à la fois de calculer la propagation d'une onde acoustique en sodium liquide subissant des variations aléatoires de température et de modéliser divers phénomènes physiques ayant lieu lors de l'interaction de cette onde avec des structures de géométries variées. L'intégration de ces modèles dans la plateforme CIVA, réalisée au cours de la thèse, permet d'obtenir un outil de simulation complète de la télémétrie avec des configurations réalistes.

La première étape de notre démarche a été consacrée à la modélisation du champ de propagation d'un faisceau acoustique généré par un transducteur en sodium liquide. En effet, la télémétrie est opérée notamment en immersion dans le sodium liquide qui est d'un point de vue acoustique un milieu fluide inhomogène aléatoire en raison de la distribution non uniforme de température et de la circulation de sodium lors du fonctionnement du réacteur, ce qui ne correspondait pas au modèle de propagation en milieu fluide homogène fondé sur la méthode des pinceaux (acoustique géométrique), qui existait déjà dans le logiciel CIVA. Nous avons alors considéré que le milieu de propagation peut être approché par la combinaison de deux parties : un champ de vitesse inhomogène stationnaire (par exemple un champ de gradient constant) décrit par une cartographie de vitesse déterministe, et un champ aléatoire de vitesse dont les valeurs sont distribuées aléatoirement dans l'espace et caractérisées par leurs statistiques comme la moyenne, la variance et la fonction de corrélation spatiale.

Nous avons étudié dans un premier temps les différentes méthodes qui permettent de calculer la propagation d'onde acoustique en milieu inhomogène ainsi que leurs conditions d'applicabilité. En privilégiant les méthodes analytiques qui sont moins coûteuses en temps de calcul, nous avons choisi la méthode de rayons pour développer un modèle déterministe de propagation (Chapitre 1). Une fois spécifiées les entrées du modèle (la cartographie spatiale de vitesse et la source), ce modèle déterministe peut calculer les tracés de rayons, les temps de vol ainsi que les amplitudes associés. Pour un champ de vitesse de gradient constant, le calcul du champ de propagation est particulièrement efficace, car le modèle déterministe se réduit à une simple équation analytique aisée à résoudre. En application à la télémétrie, un modèle déterministe est parfaitement adapté pour traiter une partie stationnaire (type gradient constant) du champ de vitesse. En revanche, pour une cartographie de vitesse aléatoire, le temps de calcul devient relativement important pour les longues distances de propagation utilisées en télémétrie ; c'est pourquoi nous avons développé un nouveau modèle beaucoup plus efficace pour calculer le champ de propagation dans un milieu aléatoire, appelée le modèle stochastique.

Le modèle stochastique consiste à coupler le modèle de propagation existant en milieu fluide homogène fondé sur l'acoustique géométrique à des corrections aléatoires de temps de

vol pour prendre en compte la perturbation aléatoire de vitesse du son (Chapitre 2). L'entrée de l'aberration aléatoire de phase n'est pas une cartographie de vitesse connue comme pour le modèle déterministe, mais l'ensemble des propriétés statistiques du champ de vitesse aléatoire. Cette aberration aléatoire est un générateur du champ aléatoire : elle reconstruit un champ aléatoire des temps de vol à partir des statistiques de temps de vol en milieu aléatoire. Des expressions analytiques des statistiques de temps de vol d'une onde acoustique ont ensuite été obtenues en fonction des statistiques du champ de vitesse aléatoire par application de la méthode de perturbation. Ce modèle stochastique a été validé par comparaison avec le modèle déterministe lors de calculs de propagation d'un faisceau généré par un transducteur réaliste. Le modèle stochastique prédit une déviation de faisceau du même ordre que le modèle déterministe dans un champ de vitesse aléatoire gaussien avec un temps de calcul largement inférieur à celui du modèle déterministe.

La deuxième thématique de la thèse a pour but de développer un modèle qui permet de calculer l'écho issu de l'interaction d'une onde incidente avec une cible. Au démarrage de la thèse, il existait déjà un modèle du calcul d'écho de surface dans CIVA, mais il était limité au calcul de la réflexion spéculaire sur une grande surface parfaitement rigide. Notre objectif est alors de développer un modèle de calcul d'écho par une cible élastique plus générique, valide en milieu fluide et modélisant efficacement la diffraction par une arête de cible.

Dans un premier temps, nous avons fait l'hypothèse simplificatrice que la cible rencontrée est parfaitement rigide (Chapitre 3), ce qui est proche de notre cas d'étude. Deux modèles classiques de diffraction ont été étudiés : la théorie géométrique de la diffraction (GTD) et l'approximation de Kirchhoff (KA). La GTD est une extension de la théorie d'acoustique géométrique à laquelle elle ajoute un champ de diffraction par les arêtes obtenu par le développement asymptotique de la solution exacte du problème de diffraction. Cependant, la GTD échoue près des frontières d'ombre où elle prédit un champ de diffraction infini. Deux modèles de correction uniforme de la GTD, la théorie uniforme de la diffraction (UTD) et la théorie asymptotique uniforme (UAT), ont été implémentés ; ils suppriment la singularité de la GTD à l'aide de l'intégrale de Fresnel et fournissent des prédictions identiques et correctes du champ de diffraction par un demi-plan et un dièdre rigides. L'UTD et l'UAT peuvent être considérées comme solutions de référence pour valider d'autres modèles développés par la suite.

Nous avons en effet calculé le champ diffracté par un demi-plan et un dièdre rigide avec un autre modèle : l'approximation de Kirchhoff (KA), une approximation fondée sur une formulation intégrale du champ de surface généré par l'onde incidente. KA fournit une solution précise pour le champ de réflexion spéculaire ; en revanche, la prédiction du champ diffracté par une arête donne lieu à des erreurs quantitatives. Cette erreur a été corrigée par raffinement de KA à l'aide de la théorie physique de diffraction (PTD). Le modèle ainsi développé « KA raffiné » consiste à corriger le champ de diffraction calculé par KA par celui de la GTD. L'erreur de KA par rapport à une solution de référence (UTD) a ainsi été largement réduite après raffinement. Par rapport à la GTD, KA raffiné fournit directement une solution uniforme correcte et est mieux adaptée à des cibles de géométrie variée. KA raffiné est donc la solution à privilégier pour une cible rigide.

Nous nous sommes ensuite intéressés à la modélisation de la diffraction d'ondes par une cible élastique d'impédance finie (Chapitre 4). Afin de prendre en compte l'impédance réelle de la cible élastique dans le calcul du champ de diffusion, nous avons supposé une condition aux limites mixte à l'interface de la cible, laquelle est fonction de l'admittance et donc coefficient de réflexion à l'interface.

L'extension du modèle de GTD à un dièdre (ou demi-plan) d'impédance finie a été étudiée. L'introduction de la fonction de Malyuzhinets dans la formule classique de la GTD

pour une cible rigide permet de tenir compte de l'admittance du dièdre d'impédance finie dans le calcul du champ diffusé. La solution uniforme UTD a été également évaluée dans le cas impédant : elle est relativement délicate à mettre en œuvre et a été utilisée comme solution de référence en vue de valider les autres modèles développés pour la diffraction par un dièdre d'impédance finie. Nous avons ensuite développé l'extension de l'approximation de Kirchhoff au cas d'une interface d'impédance finie. Ce modèle « KA général » se présente sous la forme d'une combinaison de la formulation KA pour la condition de Neumann et de celle pour la condition de Dirichlet. Un bon accord global est obtenu entre les résultats fournis par le modèle « KA général » et la solution de référence UTD. L'erreur de « KA général » se localise surtout dans la zone d'ombre pour de petits angles d'incidence par rapport à l'interface ; cette erreur est faible dans les configurations usuelles de télémétrie. Nous avons donc choisi d'employer le modèle de « KA général » pour modéliser l'interaction de l'onde acoustique avec les cibles élastiques en raison de sa simplicité par rapport à la solution UTD.

La dernière partie du travail (Chapitre 5) a eu pour but de faire le lien entre les différents modèles développés aux chapitres précédents et ce dans l'objectif du développement d'un outil de simulation complète de la télémétrie ultrasonore. L'aberration aléatoire de phase et le modèle « KA général » ont été intégrés dans le logiciel CIVA et un modèle complet de calcul d'échos de cibles immergées dans un milieu homogène ou inhomogène aléatoire été mis au point. Des validations expérimentales de ce modèle de télémétrie ont été réalisées uniquement à température homogène (pas d'effet d'inhomogénéité du milieu de propagation) : elles ont consisté en la comparaison de mesures expérimentales sur une maquette « MULTIREFLECTEUR » (contenant différentes cibles classiquement employées en télémétrie de réacteurs) dans l'eau et dans du sodium à température homogène et des résultats de simulations dans CIVA. Les validations en termes d'amplitude en eau sont meilleures en basse fréquence, car en haute fréquence la cible de référence se situe en champ proche du capteur pour lequel la simulation du champ est plus délicate. Les validations en sodium en termes d'amplitude s'avèrent concluantes et plus satisfaisantes que dans l'eau car la distance de champ proche est plus courte que dans l'eau pour une fréquence donnée et donc le positionnement de la cible de référence utilisée est bien adapté aux télémétries en sodium. Pour les validations en termes de mesure de distance de cible, on trouve que la simulation fournit une prédiction avec une bonne précision (moins de 25 μm en eau et moins de 100 μm en sodium).

De nombreuses perspectives à ces travaux de thèse peuvent être envisagées, tout d'abord, en termes de développements théoriques. Nous avons en effet fait l'hypothèse initiale que le champ de vitesse représentatif du sodium liquide est composé d'un champ de gradient constant et d'un champ aléatoire mais seule la partie aléatoire a été prise en compte au sein du modèle complet de télémétrie intégré dans CIVA. La propagation d'un faisceau généré par un transducteur réaliste pourrait être donc modélisée dans un champ de vitesse de gradient constant par le modèle déterministe étudié au chapitre 1; en couplant ce modèle avec une correction aléatoire de temps de vol fournie par l'aberration aléatoire de phase déjà intégrée à CIVA, nous pourrions obtenir un champ de propagation plus représentatif en sodium liquide. On pourrait ensuite aussi améliorer la prédiction du champ de diffraction par les arêtes du modèle de Kirchhoff général en étendant à l'application acoustique des techniques de correction développées dans le domaine électromagnétique, par exemple : la méthode des courants équivalents de Michaeli [86,87] ou celle du coefficient de diffraction incrémental de Mitzner [88]. Il sera nécessaire également de modéliser d'autres phénomènes d'interaction faisceau/cible rencontrés en télémétrie, par exemple les réflexions et diffractions multiples, les ondes de surfaces ainsi que la rugosité de la surface à inspecter.

Les validations expérimentales devraient également être poursuivies. Les validations expérimentales ont été effectuées pour le moment en milieu fluide à température homogène. Il serait utile d'effectuer des mesures du champ de propagation dans un milieu turbulent afin de valider la prédiction du modèle stochastique. Ensuite les validations expérimentales du modèle d'interaction devraient être finalisées sur d'autres cibles de télémétrie des réacteurs sous sodium, par exemple un triplan, la diffraction par un bord de cible ainsi que les réflexions multiples. Le modèle « KA général » pourrait aussi être validé dans des configurations simples courantes de CND utilisant des capteurs standards caractérisés par une seule fréquence centrale d'inspection contrairement au capteur à haute température utilisé ici en télémétrie.

ANNEXES

A 1. SYSTEME DU TRACE DE RAYONS CINEMATQUES

Nous allons présenter ici la résolution de l'équation eikonale par le biais du tracé de rayons. Cette équation différentielle partielle (EDP) peut être résolue par l'application de la méthode des caractéristiques [30] qui permet de résoudre des EDPs, linéaire ou non, d'ordre 1. Dans le cadre de cette méthode, nous cherchons des courbes (appelées courbes caractéristiques), le long desquelles l'EDP à résoudre se réduirait à une équation différentielle ordinaire (EDO). Nous cherchons donc T vérifiant une fonction régulière $H(x_i, s_i) = 0$ définie par :

$$(\nabla T)^2 - c^{-2} = s_i s_i - c^{-2} = H(x_i, s_i) = 0 \quad \text{avec} \quad s_i = \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (\text{A.1.1})$$

où $H(x_i, s_i)$ peut être considérée comme le hamiltonien de la mécanique hamiltonienne. Pour une équation non linéaire, les courbes caractéristiques sont définies comme les courbes dans l'espace des phases (x_i, s_i) vérifiant les équations canoniques de Hamilton :

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{d\mu} &= \frac{\partial H}{\partial s_i}, \\ \frac{ds_i}{d\mu} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \\ \frac{dT}{d\mu} &= s_i \frac{\partial H}{\partial s_i}, \end{aligned} \quad (\text{A.1.2})$$

où les courbes caractéristiques sont paramétrées par μ . La dérivée de la fonction $H(x_i, p_i)$ le long de ces courbes est donnée par

$$\frac{dH}{d\mu} = \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{dx_i}{d\mu} + \frac{\partial H}{\partial s_i} \frac{ds_i}{d\mu} = \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{dH}{ds_i} - \frac{\partial H}{\partial s_i} \frac{dH}{dx_i} = 0, \quad (\text{A.1.3})$$

donc H est constant sur une courbe caractéristique. Selon la mécanique hamiltonienne, H représente l'énergie totale du système et la conservation de l'énergie est respectée le long de ces courbes. Sachant que l'énergie du champ acoustique se propage le long des rayons, nous pouvons considérer que les courbes caractéristiques, déterminées par $[x_i(\mu), s_i(\mu)]$, sont les rayons cherchés et nous les obtenons par les équations canoniques de Hamilton (A.1.2) où le sens physique du paramètre de courbe μ peut être défini de façon différente selon les grandeurs cherchées. De cette façon, l'équation eikonale (EDP) est remplacée par un système d'EDOs couplées pour lesquelles la résolution est souvent plus simple. Ce système d'EDOs est appelé le système de tracé de rayons. Nous pouvons considérer davantage la forme plus générale de la fonction H :

$$H(x_i, s_i) = \frac{1}{\eta} \left[(s_i s_i)^{\eta/2} - c^{-\eta} \right], \quad (\text{A.1.4})$$

où η est souvent une valeur entière qui peut définir le sens physique du paramètre μ . Reportons l'expression générale de l'hamiltonien H (A.1.4) dans les équations (A.1.2) et (A.1.2.b), ce qui permet d'obtenir le système du tracé de rayons sous forme générale

$$\frac{dx_i}{d\mu} = c^{2-\eta} s_i, \quad (A.1.5)$$

$$\frac{ds_i}{d\mu} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{c^\eta} \right), \quad (A.1.6)$$

et dans l'équation (A.1.2.c), il vient

$$\frac{dT}{d\mu} = \frac{1}{c^\eta}. \quad (A.1.7)$$

Pour $\eta=0$, d'après (A.1.7), μ est égal directement à T ; mais dans ce cas, $\eta = 0$ n'est pas valable dans l'équation (A.1.4), remplacé par la limite $\eta \rightarrow 0$. D'après la règle de l'Hôpital, la limite de l'hamiltonien H devient alors :

$$H(x_i, s_i) = \frac{1}{2} \ln(s_i s_i) + \ln c = \frac{1}{2} \ln(c^2 s_i s_i). \quad (A.1.8)$$

Reportons cette dernière équation dans le système (A.1.2), nous obtenons la forme qui favorise le calcul du temps de vol T

$$\frac{dx_i}{dT} = c^2 s_i, \quad \frac{ds_i}{dT} = -\frac{1}{c} c_{,i}. \quad (A.1.9)$$

De même, pour $\eta=1$, μ représente l'abscisse curviligne du rayon l_r ; nous obtenons le système du tracé de rayons avec le système (A.1.5) et (A.1.6) :

$$\frac{dx_i}{dl_r} = c p_i, \quad \frac{ds_i}{dl_r} = -\frac{1}{c^2} c_{,i}. \quad (A.1.10)$$

On peut aussi faire un changement de variable en remplaçant le paramètre μ par une grandeur ζ qui satisfait l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dT}{d\zeta} = c, \quad (A.1.11)$$

ce qui correspond à $\eta = -1$. Nous avons donc

$$\frac{dx_i}{d\zeta} = c^3 p_i, \quad \frac{ds_i}{d\zeta} = -\frac{\partial c}{\partial x_i}, \quad (A.1.12)$$

où la dérivée de la lenteur s_i donne directement accès au gradient de vitesse, ce qui peut simplifier la résolution du système de tracé de rayons dans un milieu où le gradient de vitesse est constant.

A 2. JACOBIEN DE RAYONS ET TRACE DE RAYONS DYNAMIQUES

5.4.1.1 Jacobien de rayons

Afin de décrire la divergence géométrique du champ de propagation de manière plus générale, nous faisons intervenir le Jacobien de rayons, défini comme le Jacobien de la transformation du système de coordonnées cartésiennes $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ au système de coordonnées associées au rayon. Ce système est souvent composé de trois éléments. Les deux premiers éléments, appelés paramètres de rayon, notés par γ_i avec $i = 1, 2$, servent à l'indentification d'un rayon par ses conditions initiales. Le troisième élément est le paramètre courant le long du rayon $\gamma_3 = \mu$ qui a été introduit dans l'équation (A.1.2). Les paramètres de rayon γ_i sont définis à partir des conditions initiales du tracé de rayons cinématiques en un point source (\mathbf{x}_0) (onde sphérique) ou sur une surface (Σ_0) de référence où l'amplitude du champ est connue. Dans le cas d'une onde sphérique, les deux éléments peuvent être déterminés à partir des angles de rayonnement (ψ_0, ϑ_0) (voir Figure 1-10). Dans le cas d'une surface de référence (Σ_0) connue, les deux éléments des paramètres γ_i peuvent être choisis comme la position initiale (\mathbf{x}_0) du rayon ; ce point est repéré par ses coordonnées curvilignes (ξ_1, ξ_2) sur la surface. Les définitions des paramètres de rayon sur une surface sont illustrées dans la Figure A- 1.

A noter que ce nouveau système de coordonnées de rayon γ_i ne peut pas être utilisé dans une zone d'ombre ou en un point d'une caustique où plus d'un rayon passe, car ce système n'est plus unique sur ce point. Une fois les γ_i déterminés et uniques, nous exprimons le Jacobien $J^{(\mu)}$ de la transformation du système de coordonnées cartésiennes x_i vers le système de coordonnées du rayon γ_i :

$$J^{(\mu)} = \det \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \gamma_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \gamma_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \gamma_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \gamma_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \gamma_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \gamma_3} \end{vmatrix}, \quad (\text{A.2.1})$$

à l'aide de la matrice \mathbf{Q} définie par :

$$Q_{ij}^{(\mu)} = \partial x_i / \partial \gamma_j. \quad (\text{A.2.2})$$

$J^{(\mu)}$ est le Jacobien associé au paramètre μ ($\gamma_3 = \mu$ dans la matrice $Q_{ij}^{(\mu)}$), il est régulier en tout point sauf sur les caustiques car les γ_i ne peuvent pas être définis.

Si on définit le paramètre $\mu = s$ l'abscisse curviligne de rayon, le Jacobien est représenté par $J = J^{(s)}$, appelé le *Jacobien de rayons*, qui nous permet de calculer la divergence géométrique (voir la définition dans le chapitre 1, §1.2.3.1) d'un tube de rayons dans un milieu

inhomogène et calculer l'amplitude du champ par la suite. Sur une section où $s = \text{const.}$, J peut s'exprimer aussi comme suivant :

$$J = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma_2} \right)_{s=\text{const}} \cdot \mathbf{n}^T, \quad (\text{A.2.3})$$

où \mathbf{n}^T est le vecteur unitaire tangent au rayon, orienté vers la direction de propagation.

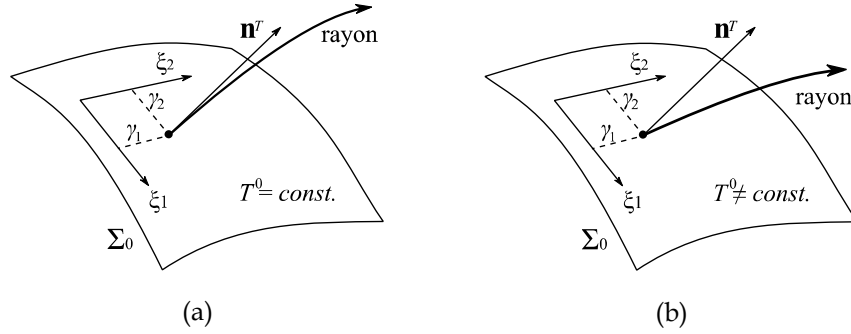


Figure A- 1 : Paramètres de rayon sur une surface Σ_0 déterminés par les coordonnées curvilignes du point initiale \mathbf{x}_0 sur la surface (ξ_1, ξ_2) ; (a) Σ_0 est une surface de front d'onde $T^0 = \text{const.}$: les rayons sont perpendiculaires à la surface ; (b) Σ_0 est une surface quelconque : les rayons ne sont pas perpendiculaires à la surface.

5.4.1.2 Calcul du Jacobien de rayons par tracé de rayons dynamiques

Les éléments de la matrice \mathbf{Q} sont évalués séparément, puisque sa troisième colonne est équivalente au membre de gauche de l'équation (A.1.5) et puisque les deux premières colonnes peuvent être déterminées par l'évaluation du système du tracé de rayons dynamiques. Nous écrivons les deux premières colonnes de la matrice \mathbf{Q} comme

$$Q_{ij} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \gamma_j} \right)_{\gamma_3=\text{const}}, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, \quad (\text{A.2.4})$$

et définissons une matrice analogue \mathbf{S} de même taille contenant les dérivés partielles du vecteur de lenteur \mathbf{s} :

$$S_{ij} = \left(\frac{\partial s_i}{\partial \gamma_j} \right)_{\gamma_3=\text{const}}. \quad (\text{A.2.5})$$

A l'aide des matrices \mathbf{Q} et \mathbf{S} , nous pouvons construire un système d'EDO couplées. Les dérivées temporelles de ces deux matrices peuvent s'exprimer de la façon suivante

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} Q_{ij} &= A1_{ik} Q_{kj} + A2_{ik} S_{kj}, \\ \frac{d}{dT} S_{ij} &= -A3_{ik} Q_{kj} - A4_{ik} S_{kj}, \end{aligned} \quad (\text{A.2.6})$$

qui fait intervenir les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} A1_{ik} &= \partial^2 H / \partial s_i \partial x_k, & A2_{ik} &= \partial^2 H / \partial s_i \partial s_k, \\ A3_{ik} &= \partial^2 H / \partial x_i \partial x_k, & A4_{ik} &= \partial^2 H / \partial x_i \partial s_k, \end{aligned} \quad k = 1, 2, 3, \quad (\text{A.2.7})$$

où le hamiltonien H est défini par $H(x_i, p_i) = (c^2 p_i p_i - 1)/2$. Avec le paramètre μ défini comme le temps de vol $\mu = T$, le système de tracé de rayons dynamique est obtenu à l'aide des expressions (A.2.6) et (A.2.7) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} Q_{ij} &= \frac{\partial c^2}{\partial x_k} s_i Q_{kj} + c^2 S_{ij}, \\ \frac{d}{dT} S_{ij} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 c^2}{\partial x_i \partial x_k} c^{-2} Q_{kj} - \frac{\partial c^2}{\partial x_i} s_k S_{kj}. \end{aligned} \quad (\text{A.2.8})$$

C'est un système linéaire d'EDO et la résolution du système est similaire à celle du système de tracé de rayons cinématiques. Dans un milieu homogène, nous obtenons des solutions analytiques au système et en milieu inhomogène, et nous adoptons des schémas numériques de résolution. Les conditions initiales dépendent des paramètres du rayon γ_l . Prenons l'exemple d'une source ponctuelle ; les paramètres du rayon sont les deux angles de rayonnement $\gamma_1 = \psi, \gamma_2 = \vartheta$, les trois composantes initiales du vecteur de lenteur sont données par les équations (1.42). La matrice \mathbf{S} est donc initialisée par

$$\begin{aligned} S_{11}(T_0) &= c_0^{-1} \cos \psi_0 \cos \vartheta_0, & S_{12}(T_0) &= -c_0^{-1} \sin \psi_0 \sin \vartheta_0, \\ S_{21}(T_0) &= c_0^{-1} \cos \psi_0 \sin \vartheta_0, & S_{22}(T_0) &= c_0^{-1} \sin \psi_0 \cos \vartheta_0, \\ S_{31}(T_0) &= -c_0^{-1} \sin \psi_0, & S_{32}(T_0) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.2.9})$$

En revanche, les conditions initiales de la matrice Q_{ij} sont nettement plus simples,

$$Q_{ij}(T_0) = 0, \quad (\text{A.2.10})$$

Puisque tous les rayons sont issus d'un même point et les coordonnées du point source \mathbf{x}_0 sont donc identiques d'un rayon à l'autre.

5.4.1.3 Résolution de l'équation de transport en termes du Jacobien du rayon

Une fois le Jacobien de rayon calculé avec le système du tracé de rayons dynamiques, nous pouvons l'introduire dans l'équation de transport à l'aide du théorème de Liouville afin d'avoir une résolution de l'équation de transport en fonction du Jacobien. On peut donc calculer l'amplitude du champ de propagation dans un milieu inhomogène par la suite. Le théorème de Liouville s'énonce de manière suivante :

Théorème de Liouville: On considère l'équation différentielle $dv/dt = f(v)$ dans \mathbb{R}^n , avec la condition initiale $v(0) = a$. Elle induit dans \mathbb{R}^n une application $a \rightarrow v(a, t)$. Soit $J = \det(\partial v(a, t)/\partial a)$ le Jacobien de cette application. On a $d \ln(J)/dt = \text{div}(f(v))$.

Dans le cas de la méthode de rayons, on considère une famille de rayons en milieu inhomogène dont la densité volumique est constante dans \mathbb{R}^n . s désigne l'abscisse sur un rayon ; un point du rayon est représenté par le vecteur \mathbf{x} et la tangente au rayon liée au point \mathbf{x} est donnée par $\mathbf{n}^T = d\mathbf{x}/dl_r$ définie dans l'équation (1.38). On applique le théorème de Liouville, avec $v = \mathbf{x}$, $t = l_r$, $f(v) = \mathbf{n}^T$ et le Jacobien de rayon défini par (A.2.3), on a donc

$$d \ln(J)/dl_r = \frac{1}{J} \frac{dJ}{dl_r} = \text{div}(\mathbf{n}^T). \quad (\text{A.2.11})$$

Selon l'équation (1.30) : $\nabla T = \mathbf{n}^T c^{-1}$, nous avons donc :

$$\begin{aligned}\nabla^2 T &= \text{div}(\nabla T) = \text{div}(\mathbf{n}^T c^{-1}) = \text{div}(\mathbf{n}^T) c^{-1} + \nabla(c^{-1}) \mathbf{n}^T \\ &= c^{-1} \frac{1}{J} \frac{dJ}{dl_r} + \frac{d(c^{-1})}{d\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dl_r} = \frac{1}{J} \frac{d}{dl_r} \left(\frac{J}{c} \right),\end{aligned}\quad (\text{A.2.12})$$

et

$$\nabla P \nabla T = \frac{1}{c} \frac{dP}{d\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{x}}{dl_r} = \frac{1}{c} \frac{dP}{dl_r}. \quad (\text{A.2.13})$$

En substituant (A.2.12) et (A.2.13) dans l'équation de transport (1.39), on a donc

$$2\nabla P \cdot P \cdot \nabla T + P^2 \nabla^2 T = 2P \cdot \frac{1}{c} \frac{dP}{dl_r} + P^2 \frac{1}{J} \frac{d}{dl_r} \left(\frac{J}{c} \right) = \frac{1}{J} \frac{d}{dl_r} \left(P^2 \cdot \frac{J}{c} \right) = 0, \quad (\text{A.2.14})$$

qui s'intègre sous la forme

$$P^2 \cdot \frac{J}{c} = \text{const.}, \quad (\text{A.2.15})$$

ce qui nous permet d'évaluer l'amplitude du champ de propagation de la façon suivante :

$$P_2 = P_1 \sqrt{\frac{c_2 J_1}{c_1 J_2}}. \quad (\text{A.2.16})$$

La comparaison entre ce dernier résultat et l'expression (1.50) montre une équivalence entre le rapport de sections S_1/S_2 et le rapport du Jacobien de rayons J_1/J_2 , ce qui permet de considérer que le Jacobien de rayons J est l'indice de la divergence géométrique du champ de propagation.

A 3. PROPRIETES DES CHAMPS ALEATOIRES

Soit un champ turbulent $u(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}$ (où $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$). Supposons que l'on fasse N expériences et que l'on mesure cette valeur en n points $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ à des temps t_1, t_2, \dots, t_m . Une moyenne d'ensemble peut être définie par

$$\langle u(\mathbf{x}_1, t_1) u(\mathbf{x}_2, t_2) \cdots u(\mathbf{x}_n, t_m) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u^i(\mathbf{x}_1, t_1) u^i(\mathbf{x}_2, t_2) \cdots u^i(\mathbf{x}_n, t_m), \quad (\text{A.3.1})$$

où i représente l'expérience n° i . Si cette quantité moyenne en des points \mathbf{x}_n et à des temps t_m est indépendante de toute translation de l'ensemble des points, une turbulence est dite homogène, soit :

$$\langle u(\mathbf{x}_1, t_1) u(\mathbf{x}_2, t_2) \cdots u(\mathbf{x}_n, t_m) \rangle = \langle u(\mathbf{x}_1 + \mathbf{h}, t_1) u(\mathbf{x}_2 + \mathbf{h}, t_2) \cdots u(\mathbf{x}_n + \mathbf{h}, t_m) \rangle \quad \forall \mathbf{h}. \quad (\text{A.3.2})$$

Une turbulence est dite stationnaire si n'importe quelle quantité moyenne en des point \mathbf{x}_n et à des temps t_m est indépendante de toute translation de l'ensemble des temps, soit :

$$\langle u(\mathbf{x}_1, t_1) u(\mathbf{x}_2, t_2) \cdots u(\mathbf{x}_n, t_m) \rangle = \langle u(\mathbf{x}_1, t_1 + \Delta t) u(\mathbf{x}_2, t_2 + \Delta t) \cdots u(\mathbf{x}_n, t_m + \Delta t) \rangle \quad \forall \Delta t. \quad (\text{A.3.3})$$

Pour une turbulence stationnaire en temps, la dépendance de deux variables situées en deux points considérés \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 distincts est décrite par sa fonction de covariance spatiale définie par

$$C_u(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \langle u(\mathbf{x}_1) u(\mathbf{x}_2) \rangle - \langle u(\mathbf{x}_1) \rangle \langle u(\mathbf{x}_2) \rangle. \quad (\text{A.3.4})$$

Si on note la partie fluctuante de cette valeur $\tilde{u} = u - \langle u \rangle$, et le vecteur séparant les deux points \mathbf{h} , la covariance devient alors

$$C_u(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 + \mathbf{h}) = C_u(\mathbf{h}) = \langle \tilde{u}(\mathbf{x}_1) \tilde{u}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{h}) \rangle. \quad (\text{A.3.5})$$

Si cette dernière fonction (A.3.5) ne dépend pas l'orientation de \mathbf{h} , mais uniquement de la distance absolue entre les deux points $h = |\mathbf{h}|$, cette turbulence est dite isotrope :

$$C_u(h) = \langle \tilde{u}(x) \tilde{u}(x+h) \rangle. \quad (\text{A.3.6})$$

Quand $h=0$, la fonction de covariance atteint sa valeur maximum $C_u(0)$ qu'on appelle la variance du champ $u(\mathbf{x})$:

$$C_u(0) = \langle \tilde{u}^2(x) \rangle = \sigma_u^2. \quad (\text{A.3.7})$$

La fonction de covariance normalisée par sa variance définit le coefficient de corrélation

$$R(h) = \frac{C_u(h)}{C_u(0)} = \frac{\langle \tilde{u}(x) \tilde{u}(x+h) \rangle}{\langle \tilde{u}^2(x) \rangle}. \quad (\text{A.3.8})$$

Ce dernier varie entre -1 et 1. Plus le coefficient $R(h)$ est proche des valeurs extrêmes -1 et 1, plus la corrélation entre les variables est forte ; on emploie simplement l'expression « fortement corrélées » pour qualifier les deux variables. Une corrélation égale à 0 signifie que les variables sont linéairement indépendantes.

A 4. PROBLEME CANONIQUE DE DIFFRACTION

Nous nous intéressons tout d'abord aux problèmes canoniques de diffraction, pour lesquels on a des solutions exactes qui décrivent les phénomènes physiques à l'aide de fonctions spéciales. Certaines solutions exactes nous permettent de déterminer le coefficient de diffraction de la GTD que l'on va présenter par la suite. Pour répondre à notre problématique, nous allons étudier seulement deux géométries simples : le demi-plan et le dièdre. On impose une condition limite Neumann sur toutes les surfaces, c'est-à-dire qu'on considère que les surfaces sont acoustiquement rigides. Cela est proche de notre cas d'étude : l'acier immergé dans le sodium liquide.

5.4.1.4 Diffraction par un demi-plan rigide

Soit un demi-plan Σ immergé dans un milieu fluide homogène bidimensionnel. Si on définit ce demi-plan par un système des coordonnées polaires en positionnant le bord du plan sur l'origine (voir la Figure A- 2), on a :

$$\Sigma = \{\varphi = 0, \forall r\}. \quad (\text{A.4.1})$$

Un point d'observation M se situe donc à une distance r du bord, et avec un angle φ en par rapport à la surface supérieure Σ^+ du plan.

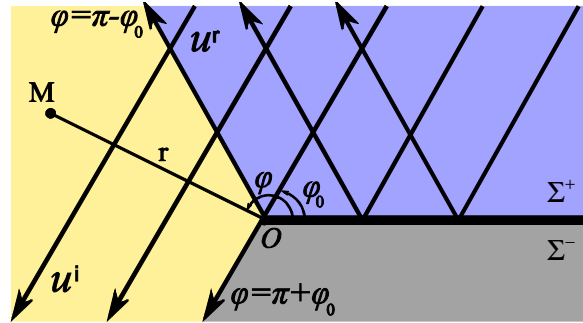


Figure A- 2 : Géométrie du problème de la diffraction par un demi-plan.

On considère une onde plane en régime harmonique incidente sur la surface supérieure du demi-plan Σ^+ avec un angle d'incident φ_0 et une amplitude A_0 :

$$u^i(\mathbf{x}) = A_0 e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (\text{A.4.2})$$

Par conséquent Σ^+ est dans la zone éclairée et la surface inférieure du demi-plan Σ^- se situe par contre dans la zone ombrée. Selon l'OG, une onde réfléchi est générée sur la surface éclairée Σ^+ , illustrée en Figure A- 2, en respectant la loi de Snell pour la réflexion :

$$u^i(\mathbf{x}) = A_0 e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (\text{A.4.3})$$

L'OG considère que la zone étudiée est séparée en trois zones différentes, représentées par différentes couleurs en Figure A- 2, la zone d'ombre O (grise, $\varphi > \pi + \varphi_0$), où ne passe aucun rayon : $u^{\text{OG}} = 0$; la zone éclairée I (jaune, $\pi + \varphi_0 > \varphi > \pi - \varphi_0$) par le seul champ incident, où

passé un rayon incident : $u^{\text{OG}} = u^i$; la zone IR (bleue, $\varphi < \pi - \varphi_0$) éclairée par le champ incident et le champ réfléchi : $u^{\text{OG}} = u^i + u^r$. Les deux lignes $\varphi_1^* = \pi - \varphi_0$ et $\varphi_2^* = \pi + \varphi_0$ sont appelées les frontières d'ombre. En passant d'une zone à l'autre, on trouve un changement brutal d'amplitude du champ acoustique géométrique sur ces frontières d'ombre. Nous pouvons exprimer le champ total prédit par l'OG sous la forme suivante :

$$u^{\text{GO}} = A_0 e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} \delta(\pi + \varphi_0 - \varphi) + A_0 e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} \delta(\pi - \varphi_0 - \varphi), \quad (\text{A.4.4})$$

où

$$\delta(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{pour } \xi > 1 \\ 0, & \text{pour } \xi < 1 \end{cases}. \quad (\text{A.4.5})$$

La fonction de Heaviside $\delta(\xi)$ a pour le but d'identifier la zone éclairée et la zone ombrée du champ incident et du champ réfléchi.

La solution exacte du problème consiste à remplacer la fonction de Heaviside $\delta(\xi)$ dans l'équation (A.4.4) par l'intégrale de Fresnel $F(\xi)$, qui est utilisée pour la description des phénomènes de diffraction en champ proche de Fresnel. Ici elle nous permet de construire des zones de transition physique sur les deux frontières d'ombre φ_1^* et φ_2^* . Le champ total u^t est donc donné par :

$$u^t = A_0 e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} F(\sqrt{2kr} \cos \frac{\varphi_0 - \varphi}{2}) + A_0 e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} F(\sqrt{2kr} \cos \frac{\varphi_0 + \varphi}{2}), \quad (\text{A.4.6})$$

où

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \int_{-\infty}^{\xi} \exp(i\tau^2) d\tau, \quad (\text{A.4.7})$$

avec $\xi > 0$ dans la zone éclairée ; $\xi = 0$ sur la frontière d'ombre ($\varphi = \varphi_1^*$ ou $\varphi = \varphi_2^*$) ; $\xi < 0$ dans la zone ombrée. L'intégrale de Fresnel est représentée en Figure A- 3 et comparée à la fonction de Heaviside :

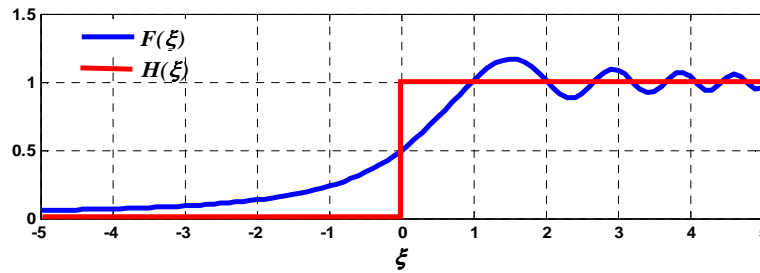


Figure A- 3 : Fonction de Heaviside et intégrale de Fresnel.

Nous pouvons encore représenter l'argument ξ en termes de l'eikonale des rayons (l'abscisse curviligne du rayon) : l'eikonale de rayon diffracté par l'arête du dièdre $s^d = r$, incident $s^i = -r \cos(\varphi - \varphi_0)$ et réfléchi $s^r = -r \cos(\varphi + \varphi_0)$. Les arguments de la fonction $F(\cdot)$ dans l'équation (A.4.7) deviennent donc :

$$\begin{aligned} \sqrt{2kr} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2} &= \sqrt{kr + kr \cos(\varphi - \varphi_0)} = \sqrt{k(s^d - s^i)}, \\ \sqrt{2kr} \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2} &= \sqrt{k(s^d - s^r)}. \end{aligned} \quad (\text{A.4.8})$$

L'équation (A.4.6) s'écrit désormais comme suit :

$$u^t = u^i F(\sqrt{k(s^d - s^i)}) + u^r F(\sqrt{k(s^d - s^r)}), \quad (\text{A.4.9})$$

où $\sqrt{(s^d - s^i)}$ et $\sqrt{(s^d - s^r)}$ sont positifs dans la zone éclairée où le champ de l'OG correspondant se propage, et négatifs dans leur zone d'ombre.

En effet, l'intégrale de Fresnel décrit de façon exacte le phénomène de la diffraction des ondes sur l'arête d'un obstacle, qui n'est pas pris en compte par l'OG. L'allure de l'intégrale de Fresnel (voir la Figure A- 3) montre que l'onde peut pénétrer dans la zone ombrée ($\xi < 0$) et progressivement s'atténuer loin de la frontière d'ombre. Mais l'intégrale de Fresnel joue ici un simple rôle de raccord d'amplitude entre la zone éclairée et la zone ombrée. Elle manque d'une interprétation physique en termes de rayons. Mais la GTD a réussi à établir une relation entre le sens physique de la diffraction et la quantification mathématique du champ diffracté. Nous pouvons déduire un coefficient de diffraction à partir de la solution exacte fournie par l'équation en faisant son développement asymptotique, ce qui consiste donc à remplacer l'intégrale de Fresnel par son développement asymptotique donné par (Borovikov [78]):

$$F(\xi) = \delta(\xi) - i \frac{\exp(i\xi^2)}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+1/2)}{(i\xi^2)^{j+1/2}}, \quad (\text{A.4.10})$$

où $\delta(\xi)$ est la fonction de Heaviside définie par (A.4.5) et $\Gamma(j+1/2)$ est la fonction gamma donnée par :

$$\Gamma\left(j + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2j)!}{2^{2j} j!} \sqrt{\pi}. \quad (\text{A.4.11})$$

Substituons l'équation (A.4.10) dans l'équation (A.4.9), on obtient la solution exacte du problème sous la forme du développement asymptotique :

$$\begin{aligned} u &= A_0 e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)} H(\pi + \varphi_0 - \varphi) + A_0 e^{-ikr \cos(\varphi + \varphi_0)} H(\pi - \varphi_0 - \varphi) \\ &\quad - A_0 \frac{e^{i(kr + \pi/4)}}{\sqrt{2kr}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2rk}\right)^j \frac{(-1)^j \Gamma(j+1/2)}{2\pi} \times \left[\left(\sec \frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right)^{2j+1} + \left(\sec \frac{\varphi + \varphi_0}{2}\right)^{2j+1} \right] \\ &= u^{\text{GO}} + u^d, \end{aligned} \quad (\text{A.4.12})$$

où $\sec(\cdot) = 1/\cos(\cdot)$. Ce développement asymptotique peut être aisément interprété en termes de rayons, car on identifie clairement la solution de l'OG et une partie qui correspond à la forme du champ de diffraction de GTD par une arête u^d . Prenons le premier terme du développement asymptotique dans l'équation (A.4.12) pour $j=0$, on obtient :

$$u^d = -A_0 \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} \frac{e^{i(\pi/4)}}{2\sqrt{2\pi}} \left[\sec \frac{\varphi - \varphi_0}{2} + \sec \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \right], \quad (\text{A.4.13})$$

avec lequel nous pouvons extraire le coefficient de diffraction du demi-plan :

$$D_{1/2 \text{ plan}}^{\text{GTD}}(\varphi, \varphi_0, k) = -\frac{e^{i(\pi/4)}}{2\sqrt{2\pi}} \left[\sec \frac{\varphi - \varphi_0}{2} + \sec \frac{\varphi + \varphi_0}{2} \right], \quad (\text{A.4.14})$$

qui est identique à celui $D_{1/2 \text{ plan}}^{\text{GTD}}$ donné par l'équation (3.25) issu du développement asymptotique de la solution du dièdre.

5.4.1.5 Diffraction par un dièdre rigide

Le dièdre de surfaces droites rigide (ou mou) est un problème canonique dont la solution exacte classique sous forme de séries a été trouvée par la méthode de la séparation des

variables par Macdonald (1902) et la solution sous forme d'intégrale a été donnée par Sommerfeld (1935). L'expression asymptotique de la solution exacte peut être appliquée par la suite pour des géométries plus complexes (principe de localité).

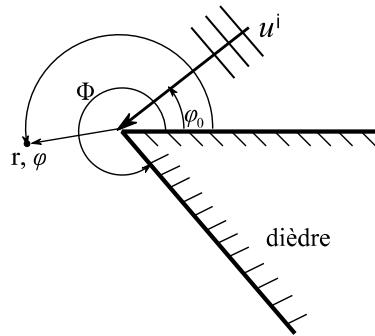


Figure A- 4 : Géométrie du problème de diffraction d'une onde plane par un dièdre 2D.

La géométrie du problème est montrée en Figure A- 4 : un dièdre avec des surfaces planes infinies $\varphi=0$ et $\varphi=\Phi$ immergé dans un milieu fluide homogène. La diffraction est excitée par une source cylindrique d'intensité I_0 et de coordonnées $\varphi=\varphi_0, r=r_0$, le point d'observation se situe à (r, φ) . L'équation d'onde est donc en coordonnées cylindriques :

$$\Delta u + k^2 u = I_0 \delta(r - r_0, \varphi - \varphi_0). \quad (\text{A.4.15})$$

Pour un problème 2D, l'opérateur Δ est défini par :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (\text{A.4.16})$$

et la condition aux limites sur les deux surfaces du dièdre pour un dièdre parfaitement rigide s'écrit :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\varphi=0 \text{ ou } \Phi} = 0, \quad (\text{A.4.17})$$

où \mathbf{n} est la normale sortante à chaque surface. Si on se situe loin de la source, le champ u vérifie l'équation d'onde homogène :

$$\Delta u + k^2 u = 0. \quad (\text{A.4.18})$$

En utilisant la méthode de séparation des variables, on pose u de l'équation d'onde (A.4.15) sous la forme :

$$u = X(r)\Theta(\varphi). \quad (\text{A.4.19})$$

Substituons cette dernière équation dans l'équation d'onde sans source, nous obtenons deux équations :

$$\frac{d^2 X}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dX}{dz} + \left(1 - \frac{v_l^2}{z^2}\right) X = 0, \quad \text{avec } z = kr, \quad (\text{A.4.20})$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\varphi^2} + v_l^2 \Theta = 0. \quad (\text{A.4.21})$$

La fonction Θ et la constante de séparation v_l^2 sont déterminées à partir des conditions aux limites, et pour une surface acoustiquement rigide, nous avons :

$$\Theta = \{\sin v_l \varphi\}, \quad v_l = l \frac{\pi}{\Phi}, \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.4.22})$$

Et les fonctions de Bessel de première espèce et de Hankel de premier type :

$$X = \begin{Bmatrix} J_{v_l}(kr) \\ H_{v_l}^{(1)}(kr) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.4.23})$$

représentent la solution de l'équation radiale (A.4.20). Au final, la solution de l'équation d'onde (A.4.15) peut s'écrire :

$$u = \begin{cases} \frac{\pi}{i\Phi} I_0 \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l J_{v_l}(kr) H_{v_l}^{(1)}(kr_0) \cos(v_l \varphi_0) \cos(v_l \varphi), & \text{avec } r \leq r_0 \\ \frac{\pi}{i\Phi} I_0 \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l J_{v_l}(kr_0) H_{v_l}^{(1)}(kr) \cos(v_l \varphi_0) \cos(v_l \varphi), & \text{avec } r \geq r_0, \end{cases} \quad (\text{A.4.24})$$

où $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \dots = 1$. Pour une onde plane ($kr_0 \rightarrow \infty$) la fonction de Hankel peut être remplacée par son expression asymptotique :

$$H_{v_l}^{(1)}(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr_0}} e^{i(kr_0 - \frac{\pi}{2} v_l - \frac{\pi}{4})} \approx H_0^{(1)}(kr_0) e^{-i\frac{\pi}{2} v_l}. \quad (\text{A.4.25})$$

L'équation (A.4.24) pour $r \leq r_0$ se réécrit comme :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\pi}{i\Phi} I_0 H_0^{(1)}(kr_0) \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l e^{-i\frac{\pi}{2} v_l} J_{v_l}(kr) \cos(v_l \varphi_0) \cos(v_l \varphi) \\ &= \frac{\pi}{2i\Phi} I_0 H_0^{(1)}(kr_0) \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l e^{-i\frac{\pi}{2} v_l} J_{v_l}(kr) [\cos v_l(\varphi - \varphi_0) + \cos v_l(\varphi + \varphi_0)]. \end{aligned} \quad (\text{A.4.26})$$

Le facteur devant la série (A.4.26) représente l'onde incidente cylindrique :

$$u_0 = \frac{1}{4i} I_0 H_0^{(1)}(kr_0). \quad (\text{A.4.27})$$

Quand $r_0 \rightarrow \infty$ et $I_0 \rightarrow \infty$, l'onde incidente cylindrique devient une onde plane avec un angle incident φ_0 :

$$u^i = u_0 e^{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (\text{A.4.28})$$

Enfin l'équation (A.4.26) peut s'écrire sous la forme classique de Sommerfeld :

$$u = u_0 \cdot [u(kr, \varphi - \varphi_0) + u(kr, \varphi + \varphi_0)], \quad (\text{A.4.29})$$

où

$$u(kr, \psi) = \frac{2\pi}{\Phi} \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon_l e^{-i\frac{\pi}{2} v_l} J_{v_l}(kr) \cos(v_l \psi). \quad (\text{A.4.30})$$

Les travaux de Sommerfeld ont montré que la fonction (A.4.30) peut être séparée en deux parties : une partie représentant le champ géométrique (incident et réfléchi) et l'autre représentant le champ diffracté par l'arête :

$$u(kr, \psi) = v(kr, \psi) + u^{\text{OG}}, \quad (\text{A.4.31})$$

avec $v(kr, \psi)$ représentant la partie du champ diffracté ; elle est sous la forme intégrale :

$$v(kr, \psi) = i \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{2\pi n} \int_{D_0} \frac{e^{ikr \cos \zeta}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\zeta + \psi}{n}} d\zeta, \quad (\text{A.4.32})$$

où $n = \Phi/\pi$, et où D_0 est le contour de l'intégration illustré en Figure 3-7.

BIBLIOGRAPHIE

1. Jadot, F.; Baqué, F.; Jeannot, J. P.; Augem, J. M.; Sibilo, J. ASTRID Sodium cooled Prototype : program for improving In Service Inspection and Repair. *Proceeding of ANIMMA Conf., Ghent, Belgium, 6-9 June 2011*.
2. CEA, Ed. *Dossier de Presse - Quatrième génération : vers un nucléaire durable*; 2010.
3. Berton, J. *Propriétés acoustique du sodium*; Note technique CEA; SSAE-LSMI-93/0058, 1990 (révisée en 1993).
4. Rodriguez, G.; Desreumaux, J. *Physico-chimie du sodium*; Note technique CEA; STMLLEPE - 96/090, 1997.
5. CIVA Website. <http://www-civa.cea.fr>.
6. Reverdy, F.; Baqué, F.; LU, B.; Jezzine, K.; Dorval, V.; Augem, J. M. Simulation of ultrasonic inspection for sodium cooled reactors using CIVA. *Proceeding of ANIMMA Conf. Ghent, Belgium, 6-9 June, 2011*.
7. Moreau, J. *Les réacteurs à Neutrons Rapides, le sodium, le cycle du combustible: bilan de l'acquis, potentiel d'innovation et perspectives d'avenir*; Rapport Technique; CEA, 2007.
8. Karweit, M.; Blanc-Benon, P.; Juvé, D.; Comte-Bellot, G. Simulation of the propagation of an acoustic wave through a turbulent velocity field: A study of phase variance. *J. Acoust. Soc. Am* **1991**, 89 (1), 52-62.
9. Ostashev, V. E. *Acoustics in moving inhomogeneous media*; E & FN Spon, 1997.
10. Flatté, S. M.; Dashen, R.; Munk, W. H.; Watson, K. M.; Zachariasen, F. *Sound transmission through a fluctuating ocean*; Cambridge University Press: New York, 1979.
11. Strohbehn, J. W. *Laser Beam propagation in the Atmosphere*; Springer-Verlag: Berlin, 1978.
12. Cerveny, V. *Seismic Ray Theory*; Combridage, 2001.
13. Chapman, C. *Fundamentals of seismic wave propagation*; Cambridge U. Press: New York, 2004.
14. Kravtsov, Y. A.; Orlov, Y. I. *Geometrical Optics of Inhomogeneous Media*; Springer-Verlag: Heidelberg, 1990.
15. Aki, K.; Richards, P. *Quantitative Seismology*; Freeman: San Francisco, 1980.
16. Rytov, S. M. *Izv. Akad. Nauk SSSR* **1937**, 2, 223.
17. Rytov, S. M.; Kravtsov, Y. A.; Tatarskii, V. I. *Principles of statistical radiophysics 4 : Wave propagation through random media* ; Springer-Verlag: Berlin, 1989.
18. Calmon, P.; Lhémy, A.; Lecoœur-Taïbi, I.; Raillon, R.; Paradis, L. Models for the computation of ultrasonic fields and their interaction with defects in realistic NDT configurations. *Nuclear Engineering Design* **1998**, 180, 271-283.
19. Vidale, J. Finite-difference calculation of traveltimes. *B. Seismol. Soc. Am.* **1988**, 78 (6), 2062-2076.
20. Cao, S.; Greenhalgh, C. A. Finite-difference solution of the eikonal equation using an

- efficient, first-arrival, wavefront tracking scheme. *Geophysics* 59 (4), 632-643.
21. Becache, E.; Joly, P.; Tsogka, C. An analysis of new mixed finite elements for the approximation of wave propagation problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **2000**, 37, 1053-1084.
 22. Flatté, S. M. Wave Propagation Through Random Media: Contributions from Ocean Acoustics. *Proceedings of the IEEE*, 1983, 1267-1294.
 23. Fiorina, D. *Application de la méthode de sommation de faisceaux gaussiens à l'étude de la propagation ultrasonore en milieu turbulent*; Thèse; Ecole Centrale de Lyon, 1999.
 24. Podvin, P.; Lecomte, I. Finite-Difference computation of travel times in very contrasted velocity models- A massively parallel approach and its associated tools. *Geophys. J. Int.* **1991**, 105, 271-284.
 25. Van Trier, J.; Symes, W. W. Upwind finite-difference calculation of traveltimes. *Geophysics* **1991**, 56 (6), 812-821.
 26. Sethian, J. A. A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **1996**, 93 (4), 1591-1595.
 27. Kim, S. An O(N) level set method for eikonal equations. *SIAM J. Sci. Comput.* **2000**, 22 (6), 2178-2193.
 28. Tsai, Y. R.; Cheng, L. T.; Osher, S.; Zhao, H. K. Fast sweeping algorithms for a class of Hamilton-Jacobi equations. *SIAM* **2003**, 41 (2), 673-694.
 29. Vinje, V.; Iversen, E.; Gjoystdal, H.; Astebol, K. Traveltime and amplitude estimation using wavefront construction. *Geophysics* **1993**, 58, 1157-1166.
 30. Bleistein, N. *Mathematical methods for wave phenomena*; Academic Press: New York, 1984.
 31. Butcher, J. C. *Numerical methods for ordinary differential equations*, 2nd ed.; John Wiley & Sons: England, 2008.
 32. Cline, A. K. Scalar and planar valued curve fitting using splines under tension. *Communications of the ACM* **1974**, 17 (4), 218-220.
 33. Pereyra, V.; Lee, W. H. K.; Keller, H. B. Solving two-point seismic ray-tracing problems in a heterogeneous medium. *B. Seimol. Soc. Am.* **1980**, 70, 79-99.
 34. Um, J.; Thurber, C. A fast algorithm for two-point seismic ray tracing. *Bull. Seismol. Soc. Am.* **1987**, 77 (3), 972-986.
 35. Gengembre, N. *Modélisation du champ ultrasonore rayonné dans un solide anisotrope et hétérogène par un transducteur immergé*; Thèse; Université Paris 7, 1999.
 36. Stamnes, J. J. *Waves in focal region*; Taylor & Francis: New York, 1986.
 37. Buffet, J. C. *Etude des fluctuations de température dans des écoulements de métal liquide au voisinage d'une paroi*; Thèse; Ecole Centrale de Lyon, 1984.
 38. Royer, D.; Dieulesaint, E. *Onde élastiques dans les solides*; Masson: Paris, 1996.
 39. Boyse, W.; Keller, J. B. Short acoustic, electromagnetic, and elastic waves in random media. *J. Opt. Soc. Am* **1995**, 12 (2), 380-389.
 40. Snieder, R.; Aldridge, D. F. Perturbation theory for travel times. *J. Acoust. Soc. Am.* **1995**, 98 (3), 1565-1569.
 41. Chernov, L. *Wave propagation in a random medium*; McGrawHill: New York, 1960.
 42. Iooss, B.; Blanc-Benon, P.; Lhuillier, C. Statistical moments of travel times at second order in isotropic and anisotropic random media. *Waves in Random and Complex Media* **2000**, 10 (3), 381-394.
 43. Black, T. C.; Freyberg, D. L. Simulation of one-dimensional correlated fields using a

- matrix-factorization moving average approche. *Math. Geol.* **1990**, 22 (1), 39-62.
44. Spanos, P. D.; Mignolet, M. P. Simulation of homogeneous two-dimensional random fields: Part II - MA and ARMA Models. *ASME J. Appl. Mech.* **1992**, 59, 270-277.
45. David, M. W. Production of conditional simulations via the LU triangular decomposition of the covariance matrix. *Math. Geol.* **1987**, 19 (2), 91-98.
46. Fai Ma, M. S. W.; Mills, W. H. Correlation structuring and the statistical analysis of steadystate groundwater flow. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **1987**, 8 (5), 848-867.
47. Golub, G. H.; Van Loan, C. F. *Matrix Computations*, 3rd ed.; The Johns Hopkins University Press, 1996.
48. Rice, S. O. Mathematical analysis of random noise. In *Selected papers on noise and stochastic processes*; Wax, N., Ed.; 1954; pp 133-294.
49. Yaglom, A. M. *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions*; Dover: New York, 1962.
50. Shinozuka, M. Simulation of multivariate and multidimensional random processes. *J. Acoust. Soc. of Am.* **1971**, 49, 357-367.
51. Shinozuka, M. Monte Carlo solution of structural dynamics. *Comp. and Struct.* **1972**, 2, 855-874.
52. Shinozuka, M.; Jan, C. M. Digital simulation of random processes and its applications. *Journal of Sound and Vibration* **1972**, 25 (1), 111-128.
53. Shinozuka, M.; Deodatis, G. Simulation of stochastic processes by spectral representation. *Appl. Mech. Rev.* **1991**, 44, 191-203.
54. Shinozuka, M. Digital simulation of random processes in engineering mechanics with the aid of FFT technique. In *Stochastic problems in mech.*; Ariaratnam, S. T., Leipholz, H. H. E., Eds..
55. Blanc-Benon, P. Occurrence of caustics for high-frequency acoustic waves propagating through turbulent fields. *Comput. Fluid Dynamics* **1991**, 2, 171-178.
56. Matheron, G. The intrinsic Random Functions and their Applications. *Adv. in Appl. Probab.* **1973**, 5, 439-468.
57. Mantoglou, A.; Wilson, J. L. Simulation of Random Fields with the Turning Bands Method. *Water resources Research* **1982**, 18 (5), 1379-1394.
58. Fenton, G. A. *Simulation and Analysis of Random Fields*; Thesis; Pinceton University: Princeton, 1990.
59. Kulkarny, V. A.; White, B. S. Focusing of waves in turbulent inhomogeneous media. *Phys. Fluids* **1982**, 25 (10), 1770-1784.
60. Berton, J. L. *Besoins en modélisation acoustiques pour les télémetries par ultrasons en sodium, et les techniques dérivées*; Rapport Technique; CEA-DEN, 2008.
61. Gobillot, G. *Télémetrie ultrasonore: Programme d'essais en eau utilisant la maquette Multireflecteur pour comparaison avec le code CIVA*; Rapport Technique; CEA-DEN, 2009.
62. Darmon, M.; Leymarie, N.; Chatillon, S.; Mahaut, S. Modeling of scattering of ultrasounds by flaws for NDT. In *Ultrasonic wave propagation in non homogeneous media*; Springer: Berlin, 2009; pp 61-71.
63. Sommerfeld, A. Mathematische Theorie der Diffraction. *Mathematische Annalen* **1896**, 47, 317-374.
64. Keller, J. B. Geometrical theory of diffraction. *J. Opt. Soc. Am.* **1962**, 52, 116-130.
65. Kouyoumjian, R. G.; Pathak, P. H. A Uniform Geometrical Theory of Diffraction for an Edge in a Perfectly Conducting Surface. *Proceedings of the IEEE* **1974**, 62 (11), 1448-1461.

66. Potel, C.; Bruneau, M. *Acoustique Générale - équations différentielles et intégrales, solutions en milieux fluide et solide, applications*; Ed. Ellipse collection Technosup, 2006.
67. Ufimtsev, P. Y. *Fundamentals of the Physical Theory of Diffraction*; John Wiley & Sons.: Hoboken USA, 2007.
68. Macdonald, H. M. *Electric Waves*; The University Press: Cambridge England, 1902; pp 186-198.
69. Sommerfeld, A. Theorie der Beugung. In *Die Differential und integralgleichungen der mechanik and physik, vol. 2, Physical Part.*; Vieweg & Sohn: Braunschweig Germany, 1935; Chapter Ch. 20.
70. Borovikov, V. A.; Kinber, B. Y. *Geometrical theory of diffraction*; IEE: London, 1994.
71. Lewis, R. M.; Boersma, J. Uniform asymptotic theory of edge diffraction. *Journal of Mathematical physics* **1969**, 10 (12), 2291-2305.
72. Ahluwalia, D. S. Uniform asymptotic theory of diffraction by the edge of a three dimensional body. *SIAM J. Appl. Math.* **1970**, 10 (2), 287-301.
73. Lee, S.; Deschamps, G. A. A uniform asymptotic theory of electromagnetic diffraction by a curved wedge. *IEEE transactions on antennas and propagation* **1976**, 24 (1), 25-34.
74. Lee, S.-W.; Deschamps, G. A. A Uniform Asymptotic Theory of Electromagnetic Diffraction by a Curved Wedge. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **1976**, 24 (1), 25-34.
75. Rhmat-Sammi, Y.; Mittra, R. Spectral analysis of high-frequency diffraction of an arbitrary incident field by a half plane- Comparison with four asymptotic techniques. *Radio Science* **1978**, 13 (1), 31-48.
76. Boersma, J.; Rahmat-Samii, Y. Comparison of two leading uniform theories of edge diffraction with the exact uniform asymptotic solution. *Radio Science* **1980**, 15 (6), 1179-1194.
77. Goodman, J. W. *Introduction to Fourier Optics*, 2nd ed.; McGraw-Hill: New York, 1996.
78. Borovikov, V. A. *Uniform Stationary Phase Method*; IEE: London UK, 1994.
79. Bruneau, M. *Manuel d'acoustique fondamentale*; Hermes Sciences Publicat.: France, 1998.
80. Malyuzhinets, G. D. Excitation, reflection and emission of surface waves from a wedge with given face impedances. *Sov. Phys. Dokl.* **1958**, 3, 752-755.
81. Williams, W. E. Diffraction by an imperfectly conducting wedge. *Proc. Cambr. Phil. Soc.* **1959**, 55, 195-209.
82. Senior, T. B. A. Diffraction by an imperfectly conducting wedge. *Comm. Pure Appl. Math.* **1959**, 12, 337-372.
83. Senior, T. B. A.; Volakis, J. L. *Approximate boundary conditions in electromagnetics*; The Institution of Electrical Engineers: London UK, 1995.
84. Pierce, A. D.; Hadden Jr, W. J. Plane wave diffraction by a wedge with finite impedance. *J. Acoust. Soc. Am.* **1978**, 63, 17-27.
85. Ryan, C. E.; Peters, L. J. Evaluation of edge-diffracted fields including equivalent currents for the caustic regions. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **1969**, 17, 292-299.
86. Michaeli, A. Elimination of infinities in equivalent edge currents, part I: fringe current components. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **1986**, 34, 912-918.
87. Michaeli, A. Elimination of infinities in Equivalent Edge Currents, Part II: Physical Optics Components. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **1986**, 34 (8), 1034-1037.
88. Mitzner, K. M. *Incremental length diffraction coefficient*; Aircraft Division Northrop Corporation Technical Report No. AFAL-TR-73-296,, 1974.

89. Knott, E. F. The relationship between Mitzner's ILDC and Michaeli's equivalent currents. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **1985**, 33, 112-114.
90. Pelosi, G.; Maci, S.; Michaeli, A. Incremental Length Diffraction Coefficients for an Impedance Wedge. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **1992**, 40 (10), 1201-1210.
91. Imbert, C. *Visualisation ultrasonore rapide sous sodium application aux réacteurs à Neutrons rapides*; Thèse; INSA de Lyon, 1997.
92. Norris, A. N.; Osipov, A. V. Far-field analysis of the Malyuzhinets solution for plane and surface waves diffractions by an impedance wedge. *Wave Motion* **1999**, 30, 69-89.
93. Herman, M. I.; Volakis, J. L.; Senior, T. B. A. Analytic expressions for a function occurring in diffraction theory. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **1987**, 35, 1083-1086.
94. Bass, F. G.; Fuks, I. M. *Wave scattering from statistically rough surfaces*; Pergamon Press: Oxford, 1973.
95. Ripoll, J.; Ntziachristos, V.; Carminati, R.; Nieto-Vesperinas, M. Kirchhoff approximation for diffusive waves. *Phys. Rev. E* **2001**, 64 (5).
96. Dorval, V.; Chatillon, S.; Lu, B.; Darmon, M.; Mahaut, S. A general Kirchhoff approximation for echo simulation in ultrasonic NDT. *AIP Conf. Proc., Review of progress in QNDE* **2012**, 31 (en cours de publication).
97. Darmon, M.; Chatillon, S. Main features of a complete ultrasonic measurement model - Part I: Formal aspects of modeling of both transducers radiation and ultrasonic flaws responses. *NDT&E Int.* **à soumettre**.
98. Lhémy, A.; Calmon, P.; Chatillon, S.; Gengembre, N. Modeling of ultrasonic fields radiated by contact transducer in a component of irregular surface. *Ultrasonics* **2002**, 40, 231-236.
99. Gengembre, N. Pencil method for ultrasonic beam computation. *Proc. of the 5th World Congress on Ultrasonics*, Paris, 2003.
100. Darmon, M.; Leymarie, N.; Chatillon, S.; Mahaut, S. Modelling of scattering of ultrasounds by flaws for NDT. In *Ultrasonic wave propagation in non homogeneous media*; Springer Berlin, 2009; Vol. 128, pp 61-71.
101. Darmon, M.; Chatillon, S.; Mahaut, S.; Calmon, P.; Fradkin, L. J.; Zernov, V. Recent advances in semi-analytical scattering models for NDT simulation. *J. Phys.: Conf. Ser.* **2011**, 269 (1).
102. Locqueteau, C. *Etude des cibles triplanes utilisées en télémétrie ultrasonore*; Thèse; Thèse de l'Université d'Aix Marseille II, 1992.
103. Gobillot, G.; Reverdy, F. *Télémétrie ultrasonore : Rapport d'avancement des essais de la maquette MULTIREFLECTEUR, modélisation associée*; Rapport technique; CEA, 2010.
104. Sato, H.; Fehler, M. C. *Seismic wave propagation and scattering in the heterogeneous earth*; Springer, 1998.
105. Flatté, S. M. Wave propagation through random media: Contributions from ocean acoustics. *Proc. IEEE* **1983**, 71, 1267-1293.
106. Aki, K.; Richards, P. *Quantitative Seismology*; Freeman: San Francisco, 1980.
107. Senior, T. B. A. Impedance boundary conditions for imperfectly conducting surfaces. *Appl. Sci. Res.* **1960**, 8, 418-436.
108. van Trier, J.; Symes, W. W. Upwind finite-difference calculation of traveltimes. *Geophysics* **1991**, 56 (6), 812-821.
109. Tatarskii, V. I. *Wave propagation in a Turbulent Medium*; Dover Publications: New York, 1961.

-
110. Tappert, F. D. The parabolic approximation method. *Wave propagation and Underwater acoustics* **1977**, 70.
 111. Boyse, W.; Keller, J. B. Short acoustic, electromagnetic, and elastic waves in random media. *J. Opt. Soc. Am* **1995**, 12 (2), 380-389.
 112. Iooss, B.; Blanc-Benon, P.; Lhuillier, C. Statistical moments of travel times at second order in isotropic and anisotropic random media. *Wave in Random and Complex Media* **2000**, 10 (3), 381-394.
 113. Clay, J. P. *Turbulent mixing of temperature in water, air and mercury*; Ph.D. thesis; University of California : San Diego.
 114. Blanc-Benon, P.; Juvé, D.; Karweit, M.; Comte-Bellot, G. Simulation numérique de la propagation des ondes acoustiques à travers une turbulence cinématique. *Journal d'Acoustique* **1990**, 3 (1), 1-8.